Mariniel Souza Galvão Junior

Gravitação Canônica no Formalismo Simplético

Vitória - ES
2016

Mariniel Souza Galvão Junior

Gravitação Canônica no Formalismo Simplético

Dissertação submetida ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Davi C. Rodrigues

Vitória - ES
2016

Aluno, Nome C.
Gravitação Canônica no Formalismo Simplético
76 páginas
Dissertação (Mestrado) - Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo. Departamento de Física.

1. Relatividade Geral
2. Formalismo Hamiltoniano
3. Sistemas Vinculados
4. Gravitação Modificada

I. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Física.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Galen Mihaylov Sotkov

Prof. Dr.
José Alexandre Nogueira

Prof. Dr.
Júlio César Fabris

Prof. Dr.
Nelson Pinto Neto

Prof. Dr.
Davi Cabral Rodrigues (Orientador)

Dedico este trabalho à memória de meus avós Dona Biu e Zé Pereira

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Davi Rodrigues, pelo enorme apoio no trabalho e por ser o principal responsáveis por minha formação acadêmica durante os dois últimos anos;

Ao meu colega Álefe de Almeida, pelas frutíferas discussões;

Meus sinceros agradecimentos à minha família: minha esposa Silvia pelo suporte e compreensão ao longo destes últimos dois anos, meus filhos, Frederico e José Pedro, minha mãe, Silvânia e meu pai, Mariniel, por serem meu porto seguro e minha razão de viver;

Aos meus queridos amigos e colegas de pós-graduação Felipe, Taís, Michael, Eddy, Dênis, Igor, Carla, Pedro e Cássio, pela companhia nos momentos difíceis e alegres;

Ao querido e sempre solícito secretário da pós-graduação, José Carlos.

Resumo

O formalismo hamiltoniano em teorias de gravitação, também conhecido por formalismo ADM, é utilizado em uma ampla gama de aplicações, indo desde a obtenção de soluções numéricas até a busca por teorias de gravidade quântica. A despeito de várias particularidades não triviais e típicas da Relatividade Geral, é sabido que o formalismo ADM pode ser entendido a partir do formalismo de Dirac de tratamento de sistemas vinculados. Neste trabalho é apresentada uma revisão do método de Dirac, uma revisão do método simplético, que constitui outro método de análise Hamiltoniana, uma revisão do formalismo ADM e, por fim, apresentamos um novo desenvolvimento do formalismo ADM a partir do método simplético. Aplicações para a Relatividade Geral e Brans-Dicke são aqui apresentadas em detalhes.

Palavras-chave: Relatividade Geral, Formalismo Hamiltoniano, Sistemas Vinculados, Gravitação Modificada

Abstract

The Hamiltonian formalism in theories of gravitation, also known as ADM formalism, is used in a wide variety of aplications, from obtaining numerical solutions to searching quantum gravity theories. Despite various non-trivial and typical particularities of General Relativity, it is known that the ADM formalism may be understood from Dirac's treatment of constrained systems. In this work is presented a review of Dirac's method, a review of the symplectic method, which constitutes another method of Hamiltonian function analysis, a review of the ADM formalism and, finally, we present a new development of the ADM formalism from the symplectic method. Aplications for General Relativity and Brans-Dicke are presented here in details.

Keywords: General Relativity, Hamiltonian Formalism, Constrained Systems, Modified Gravity

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A “irracional eficácia da matemática nas ciências naturais” [1] tem fascinado e guiado os físicos por séculos, acabando por tornar o desenvolvimento de descrições formais não apenas desejável do ponto de vista da elegância e beleza intrínsecas, mas também necessário para a evolução do conhecimento científico. Tomemos o exemplo das coordenadas generalizadas na descrição lagrangiana que podem ser convenientemente selecionadas para explorar (e investigar!) as simetrias de um sistema e a geometria de seus vínculos [2]. Ou o formalismo da mecânica quântica que através de espaços de Hilbert levou, por exemplo, ao enunciado do importante axioma onde se diz que valores físicos observáveis como energia e momento não podem ser considerados funções no espaço de fase, mas autovalores associados a uma função de estado [3]. Enfim, é impossível exagerar a importância da perspectiva certa na física. Neste trabalho motivações semelhantes nos levaram a investigar que informações diferentes o formalismo simplético pode fornecer sobre teorias de gravitação canônicas.

Como sabido, um sistema físico pode ser descrito através de sua função hamiltoniana, por sua vez dada por uma transformação de Legendre de sua lagrangiana. A evolução de um sistema hamiltoniano é dada pelos parênteses de Poisson entre as variáveis que compõem seu espaço de fase. Em alguns casos não é possível estabelecer a dinâmica diretamente através do uso de parênteses de Poisson, esses são os chamados sistemas vinculados e uma estrutura adicional deve ser desenvolvida. Para lidar com essa situação Dirac, Anderson e Bergmann [4, 5] desenvolveram um método de manipular uma dada teoria e reduzir seu espaço de fase a uma dimensão igual ao de seus graus de liberdade, obtendo equações que fornecem a evolução de observáveis físicos sem ambiguidades.

Faddeev e Jackiw [6, 7] por sua vez desenvolveram um método para lidar diretamente com a lagrangiana de uma teoria obtendo as equações de movimento mesmo para o caso de teorias com lagrangiana singular, para isso utilizam o teorema de Darboux de modo a transformar o conjunto de variáveis de um problema em um conjunto de variáveis canônicas independentes, à parte duma transformação de calibre. Embora esse seja um resultado teórico importante, frequentemente é muito difícil descobrir qual a transformação que deixa o problema solucionável. Um algoritmo inspirado no formalismo simplético de Faddeev-Jackiw foi especialmente desenvolvido por Barcelos Neto, Wotzasek [8–10] no qual o conhecimento da transformação de Darboux é desnecessário. No método FJ com algoritmo BW a lagrangiana é reescrita em termos do conjunto de variáveis estrategicamente definidas e um algoritmo é aplicado para encontrar os vínculos da teoria, bem como suas equações de movimento.

O método FJ com algoritmo BW foi utilizado na obtenção de resultados para uma ampla gama de problemas teóricos [8–17]. Serviu também de base para extensões de outros métodos ou como princípio para gerar extensões de modelos conhecidos [13, 18–22]. A aplicação do método num contexto de gravitação é recente [23, 24] e ainda incompleta. Buscamos neste trabalho justamente desenvolver esta aplicação. Nesta dissertação aplicamos o método simplético na teoria da Relatividade Geral e na teoria de gravitação de Brans-Dicke, estudando suas consequências.

A dissertação foi estruturada em seis capítulos. O Capítulo 2 trata do formalismo de Dirac para sistemas vinculados, os principais conceitos e métodos são apresentados e discutidos. No Capítulo 3 é apresentado o formalismo simplético e sua descrição geométrica de sistemas físicos. O Capítulo 4 desenvolve o formalismo de foliações para geometria riemanniana e as quantidades geométricas pertinentes são deduzidas em detalhes. No Capítulo 5 são resolvidos os problemas de encontrar os vínculos e as simetrias de calibre das teorias de Relatividade Geral e Brans-Dicke, além da contagem dos graus de liberdade. Por fim, o último capítulo traz um resumo do que foi obtido juntamente com perspectivas adicionais decorrentes do trabalho realizado.

Capítulo 2

Sistemas Hamiltonianos Vinculados

2.1 Introdução

Podemos brevemente definir uma teoria de calibre como aquela em que as variáveis dinâmicas possuem uma arbitrariedade contínua no espaço-tempo. As variáveis fisicamente relevantes são independentes da escolha de um referencial local, desse modo, as grandezas físicas são as invariante de calibre. Isto é, são grandezas que têm uma realidade independente da escolha de calibre.

O método comumente usado para o tratamento de teorias de calibre recorre à formulação hamiltoniana. Partindo do formalismo lagrangriano, vamos exibir a construção do formalismo hamiltoniano e em seguida mostraremos como são tratados os sistemas que exibem características de invariância sob determinados aspectos.

Uma propriedade das teorias de calibre é que soluções gerais das equações de movimento contêm funções arbitrárias. A presença de grandezas arbitrárias, como será apresentado, leva a relações de dependência entre as grandezas que descrevem a teoria, as relações entre elas são chamadas de vínculos. Portanto, uma teoria de calibre é sempre um sistema hamiltoniano vinculado. Entretanto o contrário é falso.

A seguir apresentaremos uma revisão baseada em especial nas Refs. [25] e [26].

2.2 Formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano

Considere um sistema com n graus de liberdade — as coordenadas generalizadas q^i — com um parâmetro t fornecendo a evolução da trajetória no espaço de configuração. As equações que descrevem a evolução dinâmica desse sistema são aquelas que fazem o funcional

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t^2} L(q,\dot{q},t)dt \ , \tag{2.1}$$

chamado ação, estacionário sob variações $\delta q^i(t)$ das coordenadas generalizadas $q^i (i = 1, \ldots, N)$, tomado a zero no contorno t_1, t_2. A função $L(q,\dot{q},t)$ é a lagrangiana do sistema.

A ação é estacionária se satisfaz as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{2.2}$$

As equações (2.2) podem ser escritas como

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}. \tag{2.3}$$

Imediatamente vemos de (2.3) que as acelerações $\ddot{q}^i$ são determinadas unicamente em função das velocidades e posições em um dado tempo se, e somente se, a matriz $\partial^2 L/\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i$ pode ser invertida, ou seja, se o determinante

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\right) := |W_{ij}| \tag{2.4}$$

é não nulo. A matriz W_{ij} é chamada de matriz hessiana. Se o determinante da matriz hessiana é zero, ela é dita singular, caso contrário a matriz hessiana é dita não singular.

2.3 Vínculos Primários

Para tratar o problema sob o formalismo hamiltoniano primeiro definimos o momento canônico $p_i(q^j,\dot{q}^k)$ por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{2.5}$$

Utilizando essa relação na equação (2.4) temos $W_{ij} = \partial p_i/\partial \dot{q}^j$. Consequentemente, se a matriz hessiana for singular, as equações das velocidades não podem ser resolvidas em termos das coordenadas e dos momentos canônicos porque não constituem um conjunto de equações independentes. Por exemplo, se tivermos uma lagrangiana $L = L[q,\dot{q}]$ tal que $p = f(q)$, temos que $W = 0$ e não existe $\dot{q}(p)$.

Em geral temos relações entre as coordenadas e os momentos do tipo

$$\phi_m(q,p) = 0, \qquad m = 1, \ldots, M. \tag{2.6}$$

Supondo que as M relações acima sejam independentes entre si, temos que $N - M$ é o posto da matriz hessiana de ordem N. As relações (2.6) são chamados de **vínculos primários**.

Considere a hamiltoniana canônica, definida a partir da transformação de Legendre,

$$H = p_i(q,\dot{q})\dot{q}^i - L(q,\dot{q}). \tag{2.7}$$

Quando existem vínculos primários se faz necessário incorporá-los na hamiltoniana de modo a descrever o sistema vinculado, o que é obtido através da inserção dos vínculos por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange, ficando assim definida a hamiltoniana total

$$H_T \equiv H + \lambda^m \phi_m \ . \tag{2.8}$$

Utilizando o princípio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H_T) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H - \lambda^m \phi_m) dt = 0 \tag{2.9}$$

obtemos as equações de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \tag{2.10a}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\delta q^i} - \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \tag{2.10b}$$

com as condições (2.6).

2.3.1 Equações Fortes e Fracas

Os vínculos (2.6) determinam uma superfície de dimensão 2N - M no espaço de fase (de dimensão 2N), esta é a superfície de vínculos primários (Γ).

É útil e comum introduzir o símbolo de igualdade fraca "$\approx$" para designar quantidades que se anulam em Γ. Em particular, todos os vínculos primários se anulam em Γ. Logo, podemos reescrever (2.6) como

$$\phi_m \approx 0 \tag{2.11}$$

para enfatizar que a quantidade ϕ_m é numericamente restrita a valer zero, mas não identicamente zero em todo o espaço de fase.

De modo geral, duas funções F e G coincidentes na subvariedade definida pelos vínculos

$\phi_m \approx 0$ são ditas fracamente iguais. Por outro lado, se a igualdade existe em todo o espaço de fase, dizemos que as duas funções são fortemente iguais e utilizamos o símbolo de igualdade usual. Logo

$$F \approx G \Leftrightarrow F - G = \lambda^m(q,p)\phi_m. \tag{2.12}$$

2.3.2 Parênteses de Poisson

Os parênteses de Poisson têm um papel importante no formalismo hamiltoniano, por exemplo, são utilizados nas equações de movimento de Hamilton e na classificação dos vínculos, como veremos adiante.

Definição 1. *Seja um espaço de fase definido pelos eixos coordenados (q^i,p_i), dadas duas funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$, o Parêntese de Poisson entre f e g é definido por*

$$\{f,g\} \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \tag{2.13}$$

para um sistema com um número finito de graus de liberdade.

Os parênteses de Poisson têm as seguintes propriedades:

1. Antissimetria: {f,g} = - {g,f} .
2. Linearidade: {f + g, h} = {f,h} + {g,h} .
3. Regra de Leibniz: {fg,h} = f{g,h} + {f,h}g .
4. Identidade de Jacobi: {f,{g,h}} + {g,{h,f}} + {h,{f,g}} .

Com a notação de igualdade fraca e a ajuda dos parênteses de Poisson podemos reescrever as equações de movimento de Hamilton (2.10) como

$$\dot{q}^i \approx \{q^i,H_T\}, \qquad \dot{p}_i \approx \{p_i,H_T\}, \tag{2.14}$$

e para uma função arbitrária do espaço de fase $F(q^i,p_j)$

$$\dot{F} \approx \{F,H_T\}, \tag{2.15}$$

donde podemos ver que o hamiltoniano total gera — no sentido de realizar a operação parênteses de Poisson com o hamiltoniano como argumento — a evolução temporal das variáveis no espaço de fase.

2.4 Condições de Consistência e Algoritmo de Dirac-Bergman

Os vínculos primários ϕ_m devem ser preservados com a passagem do tempo, isto é, é necessário exigir que $\dot{\phi}_m \approx 0$ por questão de consistência. Utilizando a equação (2.15) podemos expressar essa exigência por

$$\{\phi_m,H\} + \lambda^{m'}\{\phi_m,\phi_{m'}\} \approx 0, \tag{2.16}$$

chamada de *condição de consistência*. Dirac desenvolveu um algoritmo para resolver a equação (2.16) e obter um conjunto correto de equações de movimento para qualquer sistema vinculado [27]. Vamos agora apresentar esse algoritmo.

Na solução das equações de condição de consistência podem ocorrer três casos distintos:

Caso (i). As condições de consistência são identicamente satisfeitas. Nesse caso os ϕ_m são os únicos vínculos da teoria e os multiplicadores são arbitrários, ou seja, as equações de movimento têm funções arbitrárias dependentes do tempo. Esses vínculos geram transformações de calibre.

Caso (ii). As condições de consistência determinam univocamente os multiplicadores de Lagrange. Nesse caso os vínculos podem todos ser escritos como uma combinação linear um dos outros. Isso ocorre se os parênteses de Poisson entre os vínculos são todos fracamente diferentes de zero, ou ainda, se

$$det\,||\{\phi_m,\phi_{m'}\}|| \not\approx 0. \tag{2.17}$$

Seja $||C^{mm'}||$ a inversa de $||\{\phi_m,\phi_{m'}\}||$, nesse caso

$$C^{mm''}\{\phi_{m''},\phi_{m'}\} = \delta^m_{m'}. \tag{2.18}$$

Então, das condições de consistência (2.16), temos

$$\lambda^m \approx C^{mm'}\{\phi_{m'},H\}, \tag{2.19}$$

portanto, para uma função qualquer $F(q,p)$,

$$\dot{F} \approx \{F,H\} - \{F,\phi_m\}C^{mm'}\{\phi_{m'},H\}. \tag{2.20}$$

Oportunamente, definimos os parênteses de Dirac.

Definição 2. *Seja um espaço de fase definido pelos eixos coordenados (q^i,p_i), dadas duas funções $F(q,p)$ e $G(q,p)$, o Parêntese de Dirac entre F e G é definido por*

$$\{F,G\}^* \equiv \{F,G\} - \{F,\phi_m\}C^{mm'}\{\phi_{m'},G\}. \tag{2.21}$$

Os parênteses de Dirac tem as mesmas propriedades dos parênteses de Poisson.

A equação de movimento para uma função F qualquer pode ser escrita como

$$\dot{F} = \{F,H\}^*. \tag{2.22}$$

Com o sinal de igualdade forte, já que os parênteses de Dirac entre os vínculos e uma função qualquer são nulos,

$$\{F,\phi_m\}^* = \{F,\phi_m\} - \{F,\phi_{m'}\}C^{m'm''}\{\phi_{m''},\phi_m\} = \{F,\phi_m\} - \{F,\phi_{m'}\}\delta_m^{m'} = 0. \tag{2.23}$$

E por último temos o

Caso (iii). As condições de consistência geram novos vínculos

$$\chi_s(q,p) = 0, \qquad s = 1,\ \ldots,\ S. \tag{2.24}$$

Os vínculos gerados dessa maneira são chamados de vínculos secundários. Nesse caso, a partir de então, os vínculos secundários devem ser tratados da mesma forma como foi feito com os vínculos primários, podendo recair nos casos (i), (ii), ou (iii), sendo que, caso ocorra o terceiro caso, o procedimento deve ser repetido, de forma que após um número finito de iterações ficamos com o conjunto de todos os vínculos secundários

$$\phi_k(q,p) \approx 0 \qquad , \qquad k = M+1,\ \ldots,\ M+K, \tag{2.25}$$

onde K é o número total de vínculos secundários. A distinção entre vínculos primários e secundários é meramente formal, sem qualquer implicação física, portanto podemos simplesmente escrever

$$\phi_j(q,p) \approx 0, \qquad , \qquad j = 1,\ \ldots,\ M+K = J. \tag{2.26}$$

Finalmente, temos que as condições de consistência finais são

$$\{\phi_j,H\} + \lambda^m\{\phi_j,\phi_m\} \approx 0 \,. \tag{2.27}$$

A solução geral do sistema de J equações para as $M \leq J$ incógnitas λ^m é da forma

$$\lambda^m = U^m + v^a V^m_{(a)}, \tag{2.28}$$

onde os coeficientes v^a são inteiramente arbitrários, U^m é uma solução particular das equações não-homogêneas (2.27)

$$\{\phi_j,\phi_m\}U^m \approx -\{\phi_j,H\} \tag{2.29}$$

e $V^m_{(a)}, \quad a = 1,\ldots,A$, são as soluções das equações homogêneas

$$\{\phi_j,\phi_m\}V^m_{(a)} \approx 0. \tag{2.30}$$

A hamiltoniana total deve ser escrita com todos os vínculos, ou seja,

$$H_T = H + U^m\phi_m + v^a V^m_{(a)}\phi_m \tag{2.31}$$

e as equações de movimento podem ser escritas como

$$\dot{F} \approx \{F,H_T\}. \tag{2.32}$$

Essas funções contêm A funções arbitrárias v^a e são equivalentes as equações de movimento de Euler-Lagrange (2.2).

2.4.1 Exemplos

Agora vamos ilustrar os resultados acima através de dois exemplos.

Exemplo 1. *Encontrar os vínculos e classificá-los, encontrar as equações de movimento e mostrar que são idênticas às obtidas pelas equações de Euler-Lagrange.*

$$L = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - \xi)^2] - V(r) \tag{2.33}$$

Solução.

Os momentos conjugados às coordenadas são

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}\ ;\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2(\dot{\theta} - \xi)\ ;\ p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = 0. \tag{2.34}$$

De onde lemos o vínculo primário

$$\phi_1 \equiv p_\xi \approx 0. \tag{2.35}$$

Da equação (2.7) temos que o hamiltoniano é

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + p_\theta \xi + V(r). \tag{2.36}$$

Da condição de consistência (2.16) temos

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi, H\} + \lambda_1\{\phi_1, \phi_1\} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial p_\xi}\frac{\partial H}{\partial \xi} = -p_\theta \approx 0. \tag{2.37}$$

E obtemos então o vínculo secundário

$$\phi_2 \equiv -p_\theta \approx 0. \tag{2.38}$$

Novos vínculos não mais podem ser gerados, já que $\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} + \lambda_2\{\phi_1, \phi_2\} = 0$, identicamente.

A partir daí, utilizando (2.32) obtemos as equações de movimento

$$\dot{p}_r \approx \{p_r, H_T\} \approx \{p_r, H + \lambda_1 p_\xi - \lambda_2 p_\theta\}, \tag{2.39}$$

$$\Rightarrow \dot{p}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; \tag{2.40}$$

Procedendo do mesmo modo obtemos

$$\dot{r} = p_r; \quad \dot{p}_\theta = 0; \quad \dot{\theta} = \xi - \lambda_2; \quad \dot{p}\xi = 0; \quad \dot{\xi} = \lambda_1. \tag{2.41}$$

Através das equações de Euler-Lagrange (2.2) obtemos as equações de movimento sem recorrer à hamiltoniana

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \tag{2.42}$$

E também obtemos

$$\Rightarrow \ddot{r} - r(\theta - \xi)^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0; \tag{2.43}$$

$$\dot{r}(\dot{\theta} - \xi) = 0; \quad 2\dot{r}(\dot{\theta} - \xi) + 2r(\ddot{\theta} - \dot{\xi}) = 0\ . \tag{2.44}$$

Resolvendo as equações diferenciais obtemos que as equações de movimento dos dois diferentes métodos fornecem resultados idênticos.

Exemplo 2. *Dada a lagrangiana abaixo, encontrar os vínculos e classificá-los, encontrar as equações de movimento e resolvê-las.*

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \tag{2.45}$$

Solução.

Os momentos conjugados às coordenadas são

$$p_1 = \dot{q}_1 + q_2 \qquad , \qquad p_2 = q_1, \tag{2.46}$$

donde obtemos os vínculo primário

$$\phi_1 \equiv p_2 - q_1 \approx 0. \tag{2.47}$$

O hamiltoniano do sistema é

$$\frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2. \tag{2.48}$$

Da condição de consistência (2.16) temos o vínculo secundário

$$\{\phi_1, H\} = q_1 - q_2 \approx 0 \tag{2.49}$$

Utilizando a condição de consistência no último vínculo, temos que

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} + \lambda\{\phi_2, \phi_1\} = p_1 - q_2 - \lambda \approx 0. \tag{2.50}$$

Segue que a hamiltonia total é

$$H_T = H + \lambda\phi_2 = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - q_2)(q_1 - q_2). \tag{2.51}$$

Com o emprego dos parênteses de Dirac os vínculos podem ser postos iguais a zero, assim

$$H_T = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2. \tag{2.52}$$

Podemos, então, obter as equações de movimento através de (2.32)

$$\dot{q}_1 \approx \{q_1{,}H_T\} \approx p_1 - q_2 \tag{2.53}$$

e

$$\dot{p}_2 \approx \{p_2{,}H_T\} \approx p_1 - q_2 \tag{2.54}$$

ou, utilizando as equações fracas (2.46) e (2.49), temos as equações de movimento

$$\dot{q}_1 = p_1 - q_1 \qquad , \qquad \dot{p}_2 = p_1 - q_1, \tag{2.55}$$

cujas soluções são

$$q_1(t) = q_2(t) = p_2(t) = at + b - a, \quad p_1(t) = at + b, \tag{2.56}$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Como os vínculos são de segunda classe, não existem funções arbitrárias do tempo e conseguimos encontrar diretamente as equações de movimento do sistema.

2.5 Vínculos de Primeira e Segunda Classes

Funções definidas em um espaço de fase, vínculos em particular, podem ser classificadas em funções de primeira classe e funções de segunda classe. Essa classificação é de importância central no tratamento de teorias de calibre, como veremos mais adiante.

Definição 3. *Uma função $F(q{,}p)$ é dita de primeira classe se os parênteses de Poisson entre ela e todos os vínculos da teoria são fracamente iguais a zero, isto é,*

$$\{F{,}\phi_j\} \approx 0 \qquad , \qquad j = 1, \ldots, J \tag{2.57}$$

Uma função das variáveis canônicas que não é de primeira classe é dita ser de segunda classe.

2.5.1 Vínculos de Primeira Classe como Geradores de Transformações de Calibre

A presença de funções arbitrárias na hamiltoniana total sugere que nem todas as variáveis canônicas são observáveis físicos. De outro modo, embora o número de estados físicos dum sistema seja definido unicamente se forem dados os q's e p's, o contrário não é verdadeiro, ou seja, existe mais de um conjunto de variáveis canônicas representando o mesmo estado físico.

De fato, dado um conjunto de valores das variáveis canônicas para um tempo t_1 se espera que as equações de movimento forneçam o estado do sistema em um tempo t_2, com $t_2 \neq t_1$, qualquer ambiguidade no valor das variáveis canônicas para o tempo t_2 deve ser fisicamente irrelevante.

Agora, da equação (2.28), temos que os coeficientes v^a são funções arbitrárias do tempo, portanto seus valores em t_1 e t_2 dependem da escolha dessas funções. Considerando, em particular, $t_2 = t_1 + \delta t$, a diferença entre os valores de uma variável dinâmica F no tempo t_2, correspondente a diferentes escolhas, digamos v^a e $\tilde{v}^a$, no tempo t_1 é dada por

$$\delta F = \delta v^a \{F, \phi_a\} \tag{2.58}$$

com $\delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a)\delta t$. Portanto, a transformação (2.58) não altera o estado físico do sistema. Pela construção de v^a, dizemos que

Proposição 1. *Vínculos de primeira classe geram transformações de calibre.*

Essa observação é de importância crucial no tratamento canônico de teorias de campo, uma vez que nesse contexto os vínculos de primeira classe são todos tratados como geradores de calibre (conjectura de Dirac).

Capítulo 3

Geometria de Sistemas Hamiltonianos Vinculadas

3.1 Introdução

Um sistema mecânico é descrito completamente através da análise de sua hamiltoniana. Explorando as características gerais de um sistema mecânico podemos descrevê-lo formalmente utilizando geometria simplética. Descrições geométricas do espaço de fase são úteis, dentre outras coisas [28], para generalizar o conceito de superfícies de vínculos e sistematizar as relações existentes entre as quantidades duma dada teoria.

Neste capítulo fazemos uma revisão do formalismo simplético para sistemas vinculados de Faddeev-Jackiv, uma alternativa para a descrição de Dirac.

3.2 Estruturas Simpléticas em uma Variedade

Iniciamos a seção fornecendo as definições e teoremas utilizados na descrição do método simplético. A principal referência foi [29], os outros textos que também foram utilizados são [30] e [31].

3.2.1 Variedade Diferenciável

Definição 4. *Seja M um conjunto e U um subconjunto aberto de M. Uma variedade diferenciável C^k, com $k \geq 1$, de dimensão n é um conjunto M munido de um conjunto de homeomorfismos $\phi_i : U_i \to V_i$, onde V_i é algum subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, tal que*

$\cup_i U_i = M$

$U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$

O par (U_i, ϕ_i) é chamado de carta e a coleção de todas as cartas é chamada de atlas.

Grosso modo, uma variedade é um conjunto de pontos que podem ser marcados com coordenadas mais um conjunto de regras que dizem como esses pontos se relacionam com seus vizinhos. Numa variedade diferenciável C^k essas regras são funções que contêm derivadas parciais contínuas até a k-ésima ordem.

No que segue assumimos que todos os objetos são de classe C^∞.

3.2.2 Espaço Tangente, Diferencial e Espaço Cotangente

Definição 5. *Seja $x \in M$. Um vetor tangente a M em x é um mapa, ξ_x, de C^∞ em $\mathbb{R}$ tal que*

$$\xi_x[af + bg] = a\xi_x[f] + b\xi_x[g],$$
$$\xi_x[fg] = f(x)\xi_x[g] + g(x)\xi_x[f],$$

para $f, g \in C^\infty$, $a, b \in \mathbb{R}$.

O **espaço tangente** a M em x, denotado por T_xM é o conjunto de todos os vetores tangentes a M em x.

Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e seja $\psi : M \to N$ um mapa diferenciável. O mapa ψ induz uma transformação linear entre os espaços tangentes T_xM e $T_{\psi(x)}M$, chamado de diferencial de ψ em x e denotado por $d\psi_x$. Se $\xi_x \in T_xM$, $d\psi_x(\xi_x)$ é definido como o vetor tangente a N em $\psi(x)$ tal que para $f \in C^\infty(N)$

$$d\psi_x(\xi_x)[f] \equiv \xi_x[\psi^* f] \ .$$

Seja $f \in C^\infty(M)$; o elemento diferencial de f no ponto x ($x \in M$), df_x, é definido por

$$df_x(\xi_x) \equiv \xi_x[f], \qquad \forall \xi_x \in T_xM \ .$$

O mapa df_x é uma transformação linear de T_xM à $\mathbb{R}$.

df_x pertence ao espaço dual de T_xM, denotado por T_x^*M. Por definição, os elementos de T_x^*M são transformações lineares de T_xM em $\mathbb{R}$ e são chamados de vetores covariantes, enquanto T_x^*M é chamado de **espaço cotangente** de M em x.

3.2.3 Formas Diferenciáveis

Definição 6. *Uma forma exterior de grau 1 (ou **1-forma**) é uma função linear $\omega : M \to \mathbb{R}$, i.e.,*

$$\omega(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) = \lambda_1\omega(\xi_1) + \lambda_2\omega(\xi_2)\ , \qquad \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad e \quad \xi_1,\ \xi_2 \in T_xM\ .$$

Definição 7. *Uma forma exterior de grau 2 (ou **2-forma**) é uma função bilinear $\omega^2 : M \times M \to \mathbb{R}$ e antissimétrica:*

$$\omega^2(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \xi_3) = \lambda_1\omega^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2\omega^2(\xi_2, \xi_3)\ ,$$
$$\omega^2(\xi_1,\xi_2) = -\omega^2(\xi_2,\xi_1)\ , \qquad \forall\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad e \quad \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \in M\ .$$

Definição 8. *O **produto exterior** entre duas 1-formas, denotado por $\omega_1 \wedge \omega_2$, em um par de vetores $\xi_1,\ \xi_2 \in T_xM$, é a área orientada da imagem do paralelogramo de lados $\omega(\xi_1)$ e $\omega(\xi_2)$ no plano formado por $\omega_1,\ \omega_2$:*

$$(\omega(\xi_1) \wedge \omega(\xi_2))(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{vmatrix} = \omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2) - \omega_1(\xi_2)\omega_2(\xi_1)\ .$$

Definição 9. *Seja $x^i = (x^1,\ \ldots,\ x^n)$ um sistema de coordenadas local e ω uma 1-forma, escrita localmente como $\omega = a_i dx^i$ — onde os diferenciais $dx^1,\ \ldots,\ dx^n$ formam uma base para o espaço de 1-formas em x^i —, ambos os objetos em M. A **derivada exterior** de ω, denotada por $d\omega$, é definida por*

$$d\omega = da_i \wedge dx^i\ .$$

Analogamente, definimos a derivada exterior da 2-forma $\omega^2 \equiv \frac{1}{2}a_{ij}dx^i \wedge dx^j$ por

$$d\omega^2 \equiv \frac{1}{2}da_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j\ . \tag{3.1}$$

Por fim, uma k-forma ω é dita fechada se $d\omega = 0$.

3.2.4 Variedades Simpléticas e Teorema de Darboux

Definição 10. *Seja M^{2n} uma variedade diferenciável de dimensão par. Uma 2-forma diferencial ω^2 em M^{2n} é dita não-degenerada se para todo $\xi \neq 0$ existir um ζ tal que $\omega^2(\xi, \zeta) \neq 0$, com $\xi,\ \zeta \in T_xM$.*

Definição 11. *Seja ω^2 uma 2-forma fechada e não-degenerada. O par (M^{2n}, ω^2) é chamado de* ***variedade simplética****.*

O exemplo mais simples de variedade simplética é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ com a forma simplética

$$\omega = dx \wedge dy \ .$$

Um **sistema de coordenadas simplético** em M^{2n} é um sistema de coordenadas locais $(q_1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ tal que nesse sistema a forma ω é escrita como

$$\omega = dq^i \wedge dp_i, \qquad i = 1, \ldots, n \ .$$

Considere a transformação linear de um espaço simplético, $S : M^{2n} \to M^{2n}$. Seja $p_i : (p_1, \ldots, p_n),\ q^i : (q^1, \ldots, q^n)$ um sistema de coordenadas simplético. Nesse sistema de coordenadas podemos representar a transformação S por uma matriz $n \times n$.

Teorema 1. *Uma transformação é simplética se, e somente se, sua matriz S nas coordenadas simpléticas (q^i, p_i) satisfazem a relação*

$$S^{-1} f S = f \ ,$$

onde

$$f = \begin{pmatrix} 0 & \delta^i_j \\ -\delta^j_i & 0 \end{pmatrix} \ .$$

A matriz f é chamada de matriz simplética canônica. E por fim apresentamos sem demonstração o teorema de Darboux.

Teorema 2. *(Teorema de Darboux). Seja (M^{2n}, ω^2) uma variedade simplética e $x \in M^{2n}$ um ponto. Então, existe um sistema de coordenadas simpléticas locais $\zeta = (q^i, p_i)$, com $i = 1, \ldots, n$, centrado em x tal que a forma ω^2 é escrita como*

$$\omega^2 = dq^i \wedge dp_i \ .$$

3.3 Formalismo Simplético

Apresentamos nesta seção o método simplético de Faddeev-Jackiw para formulação hamiltoniana de sistemas vinculados [6, 7]. A formulação alternativa ao método de Dirac dispensa a categorização dos vínculos (primeira e segunda classes, primários, secundários, etc), bem como a construção de estruturas algébricas especiais (parênteses de Dirac), favorecendo uma abordagem lagrangiana. Logo em seguida apresentamos o algoritmo proposto por Barcelos-Neto e Wotzaseck [8, 10] como uma sistematização do método simplético.

3.3.1 Formalismo de Faddeev-Jackiw

Considere a 1-forma lagrangiana, escrita nas coordenadas generalizadas do espaço de fase ξ^α,

$$Ldt = a_\alpha d\xi^\alpha - V(\xi)dt, \qquad \alpha = 1, \ldots, M \tag{3.2}$$

A 1-forma lagrangiana pode ser escrita como

$$Ldt = \frac{1}{2}\xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta - V(\xi)dt, \tag{3.3}$$

onde $f_{\alpha\beta}$ é a matriz simplética, a 1-forma simplética a é

$$a \equiv \frac{1}{2}\xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta \tag{3.4}$$

e a 2-forma simplética f é

$$f = da = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta. \tag{3.5}$$

De forma geral f não é constante.

As equações de movimento são dadas pelas equações de Euler-Lagrange

$$\dot{\xi}^\beta f_{\alpha\beta} = \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha}, \tag{3.6}$$

com

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta}. \tag{3.7}$$

Quando a 2-forma f é não-singular, podemos inverter a matriz simplética e obtemos as equações de movimento

$$\dot{\xi^\alpha} = f^{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial \xi^\beta}, \tag{3.8}$$

onde $f^{\alpha\beta} \equiv (f_{\alpha\beta})^{-1}$.

Caso a matrix simplética seja singular não é possível invertê-la e encontrar as equações de movimento, nesse caso denominamos a matriz de *matriz pré-simplética*. A partir daí devemos proceder uma transformação de coordenadas. Faddeev e Jackiv argumentam que do teorema de Darboux tem-se que para qualquer 1-forma $a = a_\alpha \xi^\alpha,\ \alpha = 1,\ \ldots,\ N$, sempre é possível fazer uma mudança de variáveis

$$\xi^\alpha \rightarrow (p^j, q^k, z^l),\ \ j,\ k = 1,\ \ldots,\ M,\ \ l = 1,\ \ldots,\ N - 2M, \tag{3.9}$$

de modo que a toma a forma padrão $a = p_\alpha dq^\alpha$, fora termos de derivada total. Com a transformação de coordenadas acabamos com os $N-2M$ graus de liberdade no termo "potencial" da lagrangiana

$$Ldt = p_\alpha dq^\alpha - \Phi(p,q,z)dt. \tag{3.10}$$

Resolvendo as equações

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z^l} \equiv 0\ , \tag{3.11}$$

eliminamos os vínculos e terminamos, em geral, com expressões lineares nas variáveis tipo z. Reescrevendo a lagrangiana substituindo as variáveis tipo z em multiplicadores de Lagrange λ, temos que

$$L = p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(p,q) - \lambda_l \phi^l(p,q). \tag{3.12}$$

Temos então que os vínculos resultantes do método simplético são

$$\phi^l = 0. \tag{3.13}$$

Resolvendo as equações (3.13) reduzimos a lagrangiana ao seu formato original

$$Ldt = b_\alpha(\eta)d\eta^\alpha - W(\eta)dt, \tag{3.14}$$

mas nesse caso a equação tem um número reduzido de variáveis. Se a nova matriz pré-simplética for invertível obtemos as equações de movimento através de (3.8), caso contrário repetimos o procedimento um número finito de vezes. O problema desse método é que nem sempre é simples encontrar uma transformação de coordenadas que irá reduzir o espaço de fase.

3.3.2 Algoritmo de Barcelos-Neto e Wotzasek

O algoritmo de Barcelos Neto-Wotzasek-Montani consiste em encontar, a partir de uma lagrangiana dita de ordem zero, após n interações, uma lagrangiana dita de ordem n, a partir da qual é possível derivar a matrix simplética que governa o sistema dinâmico.

Primeiro chamamos a lagrangiana (3.2) de $L^{(0)}$, ou lagrangiana de ordem zero, assim

$$L^{(0)} = a_{\alpha}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)\alpha} - V^{(0)} \ , \tag{3.15}$$

onde as grandezas são definidas na forma matricial como

$$\begin{aligned} (\xi^{(0)\alpha}) &= \begin{pmatrix} \xi^1 \dots \xi^M \end{pmatrix} , \\ (a_{\alpha}^{(0)})^T &= \begin{pmatrix} a_1 \dots a_M \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Então substituímos essas quantidades na equações (3.7) e encontramos a matriz pré-simplética de ordem zero $(f_{\alpha\beta}^{(0)})$.

Agora, seja $P < N$ o posto de uma matriz pré-simplética $(f_{\alpha\beta}^{(0)})$, existem $N - P$ vetores não-nulos e linearmente independentes chamados **modos-zero** que satisfazem

$$\nu_m^{\alpha} f_{\alpha\beta} = 0, \tag{3.17}$$

onde $m = 1, \dots, N - P$. Logo, de acordo com (3.6), temos

$$\nu_m^{\alpha} \partial_{\alpha} V = 0. \tag{3.18}$$

Que equivale à condição de consistência no formalismo simplético.

Caso (3.18) não seja identicamente satisfeita, a relação deve ser imposta. O termo $\Omega_m \equiv \nu_m^{\alpha} \partial_{\alpha} V$ que não é identicamente nulo é um vínculo que fixa relações entre as variáveis da teoria. O caso em que a relação (3.18) é identicamente nula leva a uma transformação de calibre e será tratado na seção 3.3.3. Procedemos com o algoritmo supondo que a igualdade em (3.18) não é uma identidade.

Fazendo

$$0 = \nu_m^{\alpha} \partial_{\alpha} V^{(0)} \equiv \Phi_m^{(0)} \ , \tag{3.19}$$

de modo que os Φ_m representem agora as equações de vínculos do sistema. Vamos impor os vínculos na lagrangiana através da técnica dos multiplicadores de Lagrange, só que agora os multiplicadores de Lagrange são inseridos como derivadas temporais de uma função arbitrária. O objetivo é encontrar a lagrangiana de ordem um, $L^{(1)}$, equivalente à (3.12) e definida por

$$L^{(1)} = L^{(0)} - \dot{\lambda}^{m(0)} \Phi_m^{(0)} \ . \tag{3.20}$$

Assim, a menos de termos de derivada total, temos

$$L^{(1)} = L(0) - \dot{\lambda}^{(0)m}\Phi_m^{(0)} = (a^\alpha)^{(1)}(\xi_\alpha)^{(1)} - V^{(1)}. \tag{3.21}$$

Com isso repetimos o procedimento apresentado onde, agora,

$$\begin{aligned}
(\xi^{(1)\alpha}) &= \begin{pmatrix} \xi^{(0)\alpha} & \lambda^m \end{pmatrix} \\
(a_\alpha^{(1)})^T &= \begin{pmatrix} a_\alpha^{(0)} & \Phi_m \end{pmatrix} \\
V^{(1)} &= V^{(0)}(\xi^{(0)}) \mid_{\Phi_m=0} .
\end{aligned} \tag{3.22}$$

E substituindo as variáveis nas equações (3.7) obtemos a matriz pré-simplética da primeira iteração

$$(f_{\alpha\beta}^{(1)}) = \begin{pmatrix} (f_{\alpha\beta}^{(0)}) & \partial_\alpha \Phi_m^{(0)} \\ -\partial_\alpha \Phi_m^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Devemos repetir o algoritmo, realizando um número finito de iterações até se obter a matriz simplética e, por conseguinte, os parênteses generalizados entre as coordenadas do espaço de fase definidos por

$$\{A,B\}^* \equiv \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha} f^{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \xi^\beta}, \tag{3.24}$$

Para quaisquer funções $A(\xi)$ e $B(\xi)$ definidas no espaço de fase.

Caso $f^{(1)}$ seja singular repetimos o algoritmo n vezes até se obter a $f^{(n)}$ inversível.

Caso Contínuo

O formalismo simplético se estende naturalmente para teorias de campo. Para o caso contínuo fazemos as seguintes redefinições, sem alteração do algoritmo:

A equação (3.17), que define modo-zero, fica

$$\int d^3y\, \nu_m^\alpha(x) f_{\alpha\beta}(x,y) = 0\,. \tag{3.25}$$

A condição de consistência (3.18) fica

$$\int d^3y\, \nu_m^\alpha(x) \frac{\delta V(y)}{\delta \xi^\alpha} = 0\,. \tag{3.26}$$

A lagrangiana é descrita em termos da densidade lagrangiana, e a matriz (pré-)simplética

(3.7) fica definida por

$$f_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{\delta a_\beta(x)}{\delta \xi^\alpha(y)} - \frac{\delta a_\alpha(y)}{\delta \xi^\beta(x)} \,. \tag{3.27}$$

E, finalmente, os parênteses generalizados ficam

$$\{A,B\}^* \equiv \frac{\delta A(x)}{\delta \xi^\alpha(y)} f^{\alpha\beta}(x,y) \frac{\delta B(y)}{\delta \xi^\beta(x)}. \tag{3.28}$$

3.3.3 Simetrias de Calibre

Considere a variação infinitesimal de coordenadas

$$\xi'^\alpha = \xi^\alpha + \delta_\varepsilon \xi^\alpha \tag{3.29}$$

A variação infinitesimal da ação S, $S\{\xi'\} - S\{\xi\}$, é

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\alpha}(\xi,\dot{\xi}) \delta_\varepsilon \xi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi^\alpha}}(\xi,\dot{\xi}) \delta_\varepsilon \dot{\xi^\alpha} \right] dt. \tag{3.30}$$

Fixando a condição de contorno $\delta_\varepsilon(t_1) = \delta_\varepsilon(t_2) = 0$, temos

$$\delta_\varepsilon S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\alpha}(\xi,\dot{\xi}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi^\alpha}}(\xi,\dot{\xi}) \right] \delta_\varepsilon \xi^\alpha dt. \tag{3.31}$$

Tome agora a lagrangiana L definida por (3.10), aqui também consideramos que a matriz hessiana associada a L é singular. Se impusermos $\delta_\varepsilon \xi = 0$, o que simplesmente significa que (3.29) define uma transformação de calibre, obtemos que

$$0 = \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi^\beta} - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} - \frac{d a_\alpha}{dt} \right) \delta_\varepsilon \xi^\alpha = (f_{\alpha\beta} \dot{\xi^\beta} - \partial_\alpha V) \delta_\varepsilon \xi^\alpha. \tag{3.32}$$

Relação que é satisfeita caso os dois termos entre parênteses sejam iguais ou se

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = 0 \tag{3.33}$$

e

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha f_{\alpha\beta} \dot{\xi^\beta} = 0, \tag{3.34}$$

simultaneamente. O primeiro caso leva às equações de Euler-Lagrange, aqui descartado por considerarmos $f_{\alpha\beta}$ singular. Comparando (3.33) e (3.34) com (3.17) e (3.18), temos que

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha = \nu^\alpha \varepsilon, \tag{3.35}$$

em que $\varepsilon = \varepsilon(t)$, fornece as transformações de coordenadas que deixam a ação invariante. Por essa razão dizemos que os modos-zero são os geradores de simetrias de calibre do método simplético.

No caso contínuo $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon(x,t)$ e

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha(x) = \int d^3y \; \varepsilon(y)\nu^\alpha(y)\delta^3(x-y) \; . \tag{3.36}$$

3.3.4 Contagem dos Graus de Liberdade

Em uma teoria que os vínculos são apenas equações que relacionam as variáveis canônicas originais não há a presença de funções arbitrárias. Após a fixação de calibre, mesmo os vínculos que geram transformações de calibre são reduzidos a relações numéricas entre as variáveis canônicas originais. Dessa forma chegamos à seguinte fórmula para a contagem de graus de liberdade:

$$\begin{aligned} 2 \times \begin{pmatrix} \text{Número de graus} \\ \text{de liberdade} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{Número de variáveis} \\ \text{canônicas independentes} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Número total de} \\ \text{variáveis canônicas} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Número de equações} \\ \text{de vínculos} \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \text{Número de vínculos} \\ \text{que geram trafos de calibre} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Número de variáveis} \\ \text{de calibre fixadas} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Como os vínculos são todos derivados dos modos-zero, e como todos os vínculos que levam a transformações de calibre devem ser fixados para se obter equações que descrevem univocamente o estado de um sistema físico, podemos escrever a fórmula da contagem dos graus de liberdade como

$$\begin{aligned} 2 \times \begin{pmatrix} \text{Número de graus} \\ \text{de liberdade} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{Número total de} \\ \text{variáveis canônicas} \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \text{Número de} \\ \text{modos-zero} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Número de vínculos} \\ \text{de calibre} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.38}$$

3.3.5 Exemplos

À guisa de ilustração apresentamos dois exemplos de aplicação de método simplético pelo algorítimo BW extraídos de [8] e [12].

Partícula se Movendo em uma Esfera N-dimensional

Considere a lagrangiana

$$L^{(0)} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{m}{2} (\dot{q}^i)^2 + \lambda((q^i)^2 - 1) \right] , \tag{3.39}$$

onde $q^i = \{q^1, \ldots, q^N\}$ é a coordenada da partícula. Fazendo

$$p_i \equiv \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{q}^i} = m\dot{q}^i , \tag{3.40}$$

temos que

$$L^{(0)} = p_i \dot{q}^i - V^{(0)} , \tag{3.41}$$

com $V^{(0)} = \sum \frac{p_i^2}{2m} - \lambda((q^i)^2 - 1)$. Das definições (3.16) o vetor simplético e a 1-forma simplética são, respectivamente,

$$(\xi^i)^{(0)} = \{q^i, \, p_i, \, \lambda\} \quad \text{e} \quad (a_j)^{(0)} = \{p_j, \, 0^j, \, 0\} , \tag{3.42}$$

enquanto a matriz pré-simplética é

$$(f_{ij})^{(0)} = \begin{pmatrix} 0_{ij} & -\delta_i^j & 0_i \\ \delta_j^i & 0^{ij} & 0^i \\ 0_j & 0^j & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.43}$$

A matriz tem 1 modo-zero, a saber

$$\nu = \begin{pmatrix} 0^i & 0_i & 1 \end{pmatrix} , \tag{3.44}$$

com $0^i = \{0, \ldots, 0\}$, o zero aparecendo N vezes. Utilizando a condição de consistência (3.18) obtemos o vínculo

$$\nu \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \lambda} = q^2 - 1 \approx 0 , \tag{3.45}$$

onde omitimos o símbolo de somatória para simplificação. Esse é o vínculo que indica que o movimento da partícula está restrito à superfície da N-esfera de raio 1. Seguindo o método realizamos a primeira iteração, o que consiste em em fazer

$$V^{(1)} = V^{(0)}|_{q^2-1=0} = \frac{p^2}{m} \tag{3.46}$$

e recolocar os multiplicadores de Lagrange como derivadas no tempo. Assim a lagrangiana de ordem um é

$$L^{(1)} = p\dot{q} + \frac{1}{2}\left(q^2 - 1\right)\dot{q} - V^{(1)} \ , \tag{3.47}$$

onde a soma entre as coordenadas está subentendida.

Agora q é incluída no conjunto de variáveis canônicas e nos livramos de λ por ela não mais aparecer na lagrangiana. Assim temos

$$\xi_i^{(1)} = \{q_i, \ p_i, \ \eta\} \quad \text{e} \quad a^{i(1)} = \{p_i, \ 0, \ \frac{1}{2}\left(q^2 - 1\right)\} \ . \tag{3.48}$$

Daí, a matriz pré-simplética de ordem 1 é

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0_{ij} & -\delta_i^j & -q_i \\ \delta_j^i & 0^{ij} & 0^i \\ q_j & 0^j & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{3.49}$$

contudo o modo-zero $\nu^{(1)} = (0, -q^i, 1)$, gerando o vínculo

$$-q^i \frac{\partial V^{(1)}}{\partial p_i} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta} = -q^i p_i \approx 0 \ . \tag{3.50}$$

Seguindo para segunda interação, temos

$$L^{(2)} p\dot{q} + \frac{1}{2}\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + pq\dot{\rho} - V^{(2)} \ , \tag{3.51}$$

onde $V^{(2)} = V^{(1)}|_\Omega = V^{(1)}$. E

$$\xi_i^{(2)} = \begin{pmatrix} q^i & p_i & \eta & \rho \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

$$a^{i(2)} = \begin{pmatrix} p_i & 0^i & \frac{1}{2}\left(q^2 - 1\right) & 0 & q^i p_i \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

e

$$(f_{ij})^{(2)} = \begin{pmatrix} 0_{ij} & -\delta_i^j & -q^i & -p_i \\ \delta_j^i & 0^{ij} & 0^i & -q^i \\ q^j & 0^j & 0 & 0 \\ p_j & q^j & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.54}$$

A matriz $f_{ij}^{(2)}$ é regular e, portanto, possui inversa.

O número de graus de liberdade desse sistema é, então, igual a $(2N$ variáveis iniciais - 2 modos-zero $)\ /2 = N - 1$ graus de liberdade. Um caso particular descrito por esse problema é o de uma partícula “livre” de massa m se movendo na superfície bidimensional de uma esfera tridimensional.

Teoria Eletromagnética

Agora vamos explorar um exemplo onde aplicamos o algoritmo BW no espaço contínuo, trabalhando com um espaço de fase composto de campos e seus momentos conjugados.

Dada densidade de lagrangiana da teoria eletromagnética no vácuo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{3.55}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, aplicamos o algorítimo BMW para obter a dinâmica da teoria.

Primeiro obtemos as variáveis duais no espaço de fase. Os momentos conjugados são

$$\begin{aligned} \Pi_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = -\frac{1}{2} F_{\gamma\nu} \frac{\partial F^{\gamma\nu}}{\partial \dot{A}^\mu} \\ &= -\frac{1}{2} F_{\gamma\nu} \left(\delta_0^\gamma \delta_\mu^\nu - \delta_\mu^\gamma \delta_0^\nu \right) \\ &= F_{\mu 0} = \partial_\mu A_0 - \dot{A}_\mu \ . \end{aligned} \tag{3.56}$$

Logo, a lagrangiana de ordem zero é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &= \dot{A}^i \Pi_i - \Pi_i \left(\partial^i A_0 - \Pi^i \right) - \frac{1}{2} F^{i0} F_{i0} - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \\ &= \dot{A}^i \Pi_i - \Pi_i \partial^i A_0 + \Pi_i \Pi^i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \ , \end{aligned} \tag{3.57}$$

onde identificamos o potencial simplético de ordem zero, o vetor simplético de ordem zero e a um forma simplética de ordem zero como sendo, respectivamente,

$$V^{(0)} = \Pi_i \partial^i A_0 - \frac{1}{2}\Pi_i \Pi^i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \ , \tag{3.58}$$

$$\xi^{(0)} = \begin{pmatrix} A^0 & A^i & \Pi_i^0 \end{pmatrix} \ , \tag{3.59}$$

$$a^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_i & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.60}$$

E pudemos eliminar Π^0 do vetor simplético impunemente, já que ele não aparece na lagrangiana.

A matriz pré-simplética de ordem zero é portanto, segundo a equação (3.27),

$$\left(h_{\alpha\beta}^{(0)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_j^i \\ 0 & \delta_j^i & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \ . \tag{3.61}$$

Com modo zero

$$\nu_{[0]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.62}$$

Utilizando a condição de consistência (3.26) obtemos o vínculo

$$\int \frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} d^3y = -\partial^i \Pi_i = \Phi^{(0)} \ . \tag{3.63}$$

Ora, (3.63) é simplesmente a lei de Gauss no vácuo.

Ao invés de adicionarmos um multiplicador de Lagrange ao vínculo $\Phi^{(0)}$, podemos notar que o termo $-\partial^i \Pi_i$ já aparece na parte potencial de $\mathcal{L}^{(0)}$, bastando somente uma redefinição de variáveis para incluir (3.63) na próxima interação. Definindo $A_0 = -\dot{\eta}$, temos que

$$V^{(1)} = -\frac{1}{2} \int \left(\Pi^i \Pi_i - \frac{1}{2} F^{ij} F_{ij} \right) d^3x \tag{3.64}$$

e

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^i \dot{A}_i + \dot{\eta} \partial_i \Pi^i - V^{(1)} \ . \tag{3.65}$$

Temos de $\mathcal{L}^{(1)}$

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} A^i & \Pi_i & \eta \end{pmatrix} , \tag{3.66}$$

$$\left(a_\alpha^{(1)}\right)^T = \begin{pmatrix} \Pi_i & 0 & \partial_i \Pi^i \end{pmatrix} , \tag{3.67}$$

$$\left(h_{\alpha\beta}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j & 0 \\ \delta_i^j & 0 & \partial_i^y \\ 0 & -\partial_j^x & 0 \end{pmatrix} \delta^3 \left(\vec{x} - \vec{y}\right) , \tag{3.68}$$

onde $\partial_j^x \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}$ e $\partial_i^y \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$. Temos que o modo zero de $\left(h_{\alpha\beta}^{(1)}\right)$ é

$$\nu_{[1]} = \begin{pmatrix} -\partial_i & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.69}$$

Da condição de consistência (3.18)

$$\int \left(-\partial_i^x \frac{\delta V^{(1)}\left(\vec{y}\right)}{\delta A^i\left(\vec{x}\right)} + \frac{\delta V^{(1)}\left(\vec{y}\right)}{\delta \eta^i\left(\vec{x}\right)} \right) d^3y = -\int \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{1}{2} F_{kl}\left(\vec{y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \delta_i^l \delta^3\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \right.\right. \tag{3.70}$$
$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial y^l} \delta_i^k \delta^3\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \right) \right] d^3y = -\int \frac{\partial}{\partial x^i} F_{ik}\left(\vec{y}\right) \frac{\partial}{\partial y^k} \delta^3\left(\vec{x} - \vec{y}\right) d^3y = 0 ,$$

isto é, identicamente nulo, desse resultado concluímos existir as seguintes transformações de calibre

$$\delta_{\mathcal{E}} A^i = \partial^i \mathcal{E} , \tag{3.71}$$

$$\delta_{\mathcal{E}} \eta = \mathcal{E} . \tag{3.72}$$

mas (3.72) é de fato

$$\delta_{\mathcal{E}} \int A_0 dt = \mathcal{E} . \tag{3.73}$$

Portanto, (3.72) pode ser escrita como

$$\delta_{\mathcal{E}} A_0 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \tag{3.74}$$

e as duas transformações de calibre ficam

$$\delta_{\mathcal{E}} A^i = -\partial^i \mathcal{E} , \tag{3.75}$$

$$\delta_{\mathcal{E}} A_0 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} , \tag{3.76}$$

ou, substituindo $\mathcal{E} \equiv -\Lambda$,

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\Lambda \ , \tag{3.77}$$

$$\Phi \to \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \ . \tag{3.78}$$

De acordo como indicado em [32] (cap. 3, Equações 6.12 e 6.13). Temos então que o potencial de ordem dois

$$V^{(2)} = V^{(1)}|_{\Omega} = -\frac{1}{2}\Pi^i\Pi_i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} \tag{3.79}$$

e a lagrangiana de ordem dois é

$$\mathcal{L}^{(2)} = \Pi_i\dot{A}^i + \dot{\eta}\partial_i\Pi^i + \dot{\gamma}\partial_i A^i - V^{(2)} \ . \tag{3.80}$$

Onde escolhemos $\partial_i A^i = 0$, que é o gauge de Coulomb. Desta, obtemos

$$\left(\xi^{(2)\alpha}\right) = \begin{pmatrix} A^i & \Pi^i & \eta & \gamma \end{pmatrix} \ , \tag{3.81}$$

$$\left(a_\alpha^{(2)}\right)^T = \begin{pmatrix} \Pi_i & 0 & \partial_i\Pi^i & \partial_i A^i \end{pmatrix} \ , \tag{3.82}$$

$$f_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^i_j & 0 & \partial^y_i \\ \delta^j_i & 0 & \partial^y_i & 0 \\ 0 & -\partial^x_j & 0 & 0 \\ -\partial^x_j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \ . \tag{3.83}$$

Com $(f_{\alpha\beta})$ é regular, possui inversa, e é igual a

$$f_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^i_j - \dfrac{\partial^j\partial_i}{\partial^k\partial_k} & 0 & \delta^i_j - \dfrac{\partial^i}{\partial^k\partial_k} \\ -\delta^i_j + \dfrac{\partial^j\partial_i}{\partial^k\partial_k} & 0 & -\dfrac{\partial^i}{\partial^k\partial_k} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^j}{\partial^k\partial_k} & 0 & \dfrac{1}{\partial^k\partial_k} \\ \dfrac{\partial^j}{\partial^k\partial_k} & 0 & -\dfrac{1}{\partial^k\partial_k} & 0 \end{pmatrix} \delta^3\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \ . \tag{3.84}$$

Com todas as derivadas atuando em $\vec{x}$. Os parênteses generalizados (3.28) entre A^i e Π_j são, portanto,

$$\{A^i(\vec{x},t), \Pi_j(\vec{y},t)\}^* = \left(\delta^i_j - \frac{\partial^j\partial_i}{\partial^k\partial_k}\right)\delta^3\left(\vec{x} - \vec{y}\right) \ . \tag{3.85}$$

Procedendo à contagem dos graus de liberdade. Temos (8 campos iniciais $(A^\mu,\ \Pi_\mu)$ - 2 modos zero $(\nu_{[0]},\ \nu_{[1]})$ - 1 variável eliminada (A_0) - 1 vínculo (Eq. (3.70))) $/2 = 2$ graus de liberdade.

Por fim lembramos que resultados do tipo (3.84) e (3.85) não fazem parte do escopo dessa dissertação, aqui nos interessa principalmente encontrar as transformações de calibre de uma teoria mais a contagem de seus graus de liberdade. O resultado acima aparece como ilustração do método conforme originalmente elaborado por Barcelos-Neto e Wotzasek.

Capítulo 4

Formalismo ADM da Gravitação

4.1 Introdução

A formulação da teoria de gravitação de Einstein em linguagem canônica é interessante sob diversos aspectos, tais como em teoria de análise de sistemas dinâmicos, na investigação de soluções numéricas, em questões envolvendo teorias quânticas da gravitação e até como parte essencial de teorias alternativas como a SUGRA [33], só para citar algumas aplicações. Tal formulação é atingida com o formalismo ADM.

O formalismo ADM (Arnowitt-Deser-Misner), desenvolvido na década de 60 [34], consiste em "quebrar"a covariância explícita das equações de Einstein, separando direções espaciais das temporais, assim fornecendo uma noção de tempo e evolução temporal em teorias de gravitação. Assim como ocorre em espaços-tempo com a métrica de Minkowski, em geral[1] também podemos adotar uma superfície "espacial" tridimensional e escolher uma quarta coordenada perpendicular ao plano considerado e adotá-lo como o eixo do "tempo", onde deve ser arbitrado qual das duas direções possíveis é o futuro. Como esta foliação do espaço-tempo pode ser feita é o objeto desse capítulo. As principais referências utilizadas nesse capítulo são [37] e [38], onde esse último, conforme apontado pelo autor, é basicamente uma revisão de [35] com os cálculos expandidos.

[1] Na verdade nem sempre é possível fazer uma foliação do espaço-tempo, para que essa foliação possa ser feita globalmente a variedade precisa ser globalmente hiperbólica. Mais detalhes em [35] e [36].

4.2 Geometria de Hiperssuperfícies

4.2.1 Foliação do Espaço-Tempo

A formulação adequada de uma teoria canônica para a gravitação requer uma separação do espaço e do tempo. No contexto de relatividade especial, existe uma escolha natural para a coordenada temporal, e a métrica é invariante pelas transformações de especial interesse, as transformações de Lorentz. Já para o caso geral não existem simetrias de fundo ou observadores inerciais prediletos, tornando a noção de tempo muito mais generalizada. Nesse caso podemos simplesmente considerar superfícies “espaciais”, digamos Σ, parametrizada para alguma função $t \in \mathbb{R}$ constante, assim $M = \Sigma \times \mathbb{R}$.

Em geometria Riemmaniana dada a função t sempre existe um vetor normal a Σ dado por $\nabla^\mu t$. Para todo campo vetorial $s^\mu \in T\Sigma$ a t constante, temos que $g_{\mu\nu} s^\mu \nabla^\nu t = s^\mu \nabla_\mu t = 0$.

Apenas falta agora definir um vetor que aponte na direção da passagem do “tempo”. Da não degenerescência da métrica definimos o vetor normalizado

$$n^\mu \equiv \frac{\nabla^\mu t}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\nabla^\alpha t \nabla^\beta t}} \ , \tag{4.1}$$

tal que $g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1$. Exigimos que esse vetor não mude de sentido (o qual denominamos futuro), assim $n^\mu \nabla_\mu t > 0$.

Esta divisão do espaço-tempo fornece à subvariedade Σ uma estrutura riemanniana própria. Temos, então, a *métrica induzida* definida por

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \ , \tag{4.2}$$

que é única por conta de sua propriedade de *operador projetor*, a saber, verifica-se imediatamente que

$$h^\sigma_\mu h^\mu_\nu = h^\nu_\sigma \ , \tag{4.3}$$

$$h_{\mu\nu} n^\nu = 0 \tag{4.4}$$

e

$$h_{\mu\nu} s^\nu = g_{\mu\nu} s^\nu , \qquad \forall \ s^\nu \in \ T\Sigma \ . \tag{4.5}$$

Podemos considerar $h_{\mu\nu}$ como sendo a parte espacial de $g_{\mu\nu}$, definindo uma métrica positivo definida em Σ, daí simplesmente escrevemos h_{ab}. Assim h^{ab} equivale à inversa de h_{ab} quando aplicada a vetores tangentes a Σ.

Nas seções abaixo até a seção (4.3) usaremos a notação com índices a, b, c etc, significando que, dado um vetor $s^a \in TM$, $a = 0, 1, 2, 3$.

4.2.2 Derivadas Temporais

Segundo a interpretação da métrica induzida h_{ab} como sendo a métrica espacial, faz sentido definirmos uma derivada temporal da métrica induzida. Introduzimos o *campo vetorial evolução temporal* t^a para definir a direção da derivada temporal, que é dado por

$$t^a \nabla_a t = 1 \ . \tag{4.6}$$

Esta condição, junto com uma a condição $t^a \nabla_a s^b = 0$, com $s^a \in T\Sigma$, garante que (4.6) possa ser interpretada como uma componente temporal. Podemos simplesmente decompor t^a em

$$t^a = n^a N + N^a \ , \tag{4.7}$$

onde utilizamos a definição a seguir.

Definição 12. *Definimos função lapso e vetor deslocamento, respectivamente, por*

$$N \equiv -n_a t^a \quad e \quad N^a \equiv h^{ab} t_a \ . \tag{4.8}$$

Com isso é possível escrever a seguinte proposição [37]:

Proposição 2. *Seja T um tensor arbitrário definido em M, sua derivada temporal é dada por*

$$\dot{T}^{a_1,\ldots,a_n}_{b_1,\ldots,b_m} \equiv h^{a_1}_{c_1} \ldots h^{a_n}_{cn} h^{d_1}_{b_1} \ldots h^{d_m}_{b_m} \mathcal{L}_t T^{c_1,\ldots,c_n}_{d_1,\ldots,d_m} \ , \tag{4.9}$$

onde $\mathcal{L}_t$ é a derivada de Lie ao longo do vetor evolução temporal t^a.

4.2.3 Curvaturas Intrínseca e Extrínseca

Curvatura Intrínseca

Da equação (4.1), em geral temos que

$$n_a n^a = \begin{cases} -1, & \text{se } \Sigma \text{ é tipo-espaço}, \\ 1, & \text{se } \Sigma \text{ é tipo-tempo} \ . \end{cases} \tag{4.10}$$

Para o caso em que o produto interno é nulo, é possível construir uma *conexão de Levi-Civita única* D, sem torção e com métrica compatível com Σ [35]. A própria métrica espacial é uma quantidade intrínseca, e como ela é de fato uma métrica em Σ é possível definir o operador D_a, tal que $D_a h_{bc} = 0$:

Definição 13.

$$D_c T^{a_1,\dots,a_n}_{b_1,\dots,b_m} \equiv h^{a_1}_{d_1} \dots h^{a_k}_{d_k} h^{e_1}_{b_1} \dots h^{e_l}_{b_l} h^f_c \nabla_f T^{d_1,\dots,d_k}_{e_1,\dots,e_l} \ . \tag{4.11}$$

A derivada covariante D_a imediatamente satisfaz a condição de linearidade, a regra de Leibniz e preserva a métrica espacial. De fato,

$$h^d_a h^e_b h^f_c \nabla_f h_{de} = h^d_a h^e_b h^f_c \nabla(g_{de} + n_d n_e) = 0 \ , \tag{4.12}$$

onde usamos que g_{de} é covariante a ∇_f, além da relação (4.4). Com uma derivada covariante definida é possível definir outras quantidades geométricas da foliação.

Definição 14. *O tensor curvatura intrínseca é definido como o tensor de Riemann tridimensional*

$$^{(3)}R^d_{\ abc}\omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c \ , \tag{4.13}$$

para todo $\omega_c \in T^*\Sigma$.

Como usamos somente a derivada espacial D_a, aplicada a formas espaciais ω_c , $^{(3)}R^d_{\ abc}$ é definido intrinsecamente. Do tensor de Riemann intrínseco obtemos o 3-tensor de Ricci e o 3-escalar de Ricci usando as contrações usuais.

Curvatura Extrínseca

Acabamos de identificar que a curvatura intrínseca é uma quantidade completamente definida na seção espacial do espaço-tempo, logo falta a informação associada à derivação na direção temporal. O resultado é a componente geométrica extrínseca.

Ao contrário da geometria intrínseca, que se aplica somente à variedade $(\Sigma,\ h_{ab})$, não importando como ela está imersa na variedade do espaço-tempo, a geometria extrínseca de Σ em $\Sigma \times \mathbb{R}$ se refere ao modo como a variedade imersa Σ "se dobra" em torno de sua vizinhança. Isso significa que, em geral, n^a é variável ao longo de Σ.

Definição 15. *O tensor de curvatura extrínseca é definido por*

$$K_{ab} \equiv D_a n_b = h^c_a h^d_b \nabla_c n_d \ . \tag{4.14}$$

O tensor K_{ab} possui as seguintes propriedades úteis para nossa exposição:

1. $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b = \nabla_a n_b + n_a n^c \nabla_c n_b$. Ou seja, pode-se dispensar um projetor da definição de D_a. Prova:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= h_b^d h_a^c \nabla_c n_d = (\delta_b^d + n_b n^d) h_a^c \nabla_c n_d && (4.15) \\ &= h_a^c \nabla_c n_b + n_b n^d h_a^c \ . && (4.16) \end{aligned}$$

   Notando que $n^d \nabla_c n_d = \frac{1}{2}(n^d \nabla_c n_d + n_d \nabla_c n^d) = \frac{1}{2}\nabla_c (n_d n^d) = 0$, temos o resultado.

2. É simétrico, $K_{ab} = K_{ba}$.

3. A curvatura extrínseca é dada pela metade da derivada de Lie da métrica induzida ao longo do vetor normal

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab}. \tag{4.17}$$

   A demonstração é imediata:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n h_{ab} &= n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c && (4.18) \\ &= n^c \nabla_c (n_a n_b) + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a \\ &= (\delta_a^c + n_a n^c) \nabla_c n_b + (\delta_b^c + n_b n^c) \nabla_c n_a \\ &= h_a^c \nabla_c n_b + h_b^c \nabla_c n_a = K_{ab} + K_{ba} = 2K_{ab} \ . \end{aligned}$$

4.

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a) \ , \tag{4.19}$$

   onde $\dot{h}_{ab} = h_a^c h_b^d \mathcal{L}_t h_{cd}$. Esse resultado segue de

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab} && (4.20) \\ &= \frac{1}{2N}(N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a (N n^c) + h_{ac} \nabla_b (N n^c)) \\ &= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d \mathcal{L}_{t-N} h_{cd} = \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d (\mathcal{L}_t h_{cd} - \mathcal{L}_N h_{cd}) \ , \end{aligned}$$

   onde fizemos a substituição $N n^a = t^a - N^a$.

4.2.4 Decomposição da Métrica

Definição 16. *Sejam (y^a) as coordenadas induzidas da superfície Σ_t, chamamos de coordenadas adaptadas à foliação as coordenadas*

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a) \ . \tag{4.21}$$

O operador projeção pode, então, ser escrito como

$$e^\alpha_a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \ . \tag{4.22}$$

E o elemento de linha de Σ_t é

$$ds^2_{\Sigma_t} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b\right) = h_{ab} dy^a dy^b \ , \tag{4.23}$$

de modo que a métrica induzida é dada por

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b \ . \tag{4.24}$$

Expandindo a 3-métrica induzida h relativa às coordenadas $(x^i) \in \Sigma_t$, temos a 2-forma

$$h = h_{ij} dx^i dx^j \ . \tag{4.25}$$

Como o vetor deslocamento é tangente à superfície Σ_t, a métrica induzida pode ser usada para abaixar e levantar índices desse vetor,

$$N_i = h_{ij} N^j \ . \tag{4.26}$$

A expansão da métrica do espaço-tempo g nas coordenadas correspondentes é a 2-forma

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \ . \tag{4.27}$$

Como g é um morfismo que leva dois vetores em um número real, podemos ver seus componentes como a função

$$g_{\alpha\beta} = g(\vec{\partial_t}, \vec{\partial_N}) \ . \tag{4.28}$$

Portanto, utilizando (4.7) temos

$$\begin{aligned} g_{00} = g(\vec{\partial}_t,\vec{\partial}_t) &= t^a t_a \\ &= (n^a N + N^a)(n_a N + N_a) \\ &= -N^2 + N^a N_a \ , \end{aligned} \tag{4.29}$$

onde utilizamos $n_a n^a = -1$, da Eq. (4.1), e $n^a h_{ab} = 0$, Eq. (4.4). Também

$$\begin{aligned} g_{0i} = g(\vec{\partial}_t,\vec{\partial}_i) &= \vec{t}\cdot\vec{\partial}_i \\ &= (\vec{n}N + \vec{N})\cdot\vec{\partial}_i = \vec{N}\cdot\vec{\partial}_i \\ &= N_a(\partial^a\partial_i) = N_a\delta^a_i \\ &= N_i \end{aligned} \tag{4.30}$$

e

$$g_{ij} = g(\vec{\partial}_i,\vec{\partial}_j) = \vec{\partial}_i\cdot\vec{\partial}_j = h_{ij} \ . \tag{4.31}$$

Portanto, a matriz que representa a métrica do espaço tempo em uma foliação $3+1$ é

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^i N_i & N^j \\ N^i & h_{ij} \end{pmatrix} \ . \tag{4.32}$$

Podemos então avaliar explicitamente a métrica do espaço tempo:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (-N^2 + N_i N^i)dtdt \tag{4.33}$$

$$+N_j dtdx^j + N_i dtdx^i \tag{4.34}$$

$$+h_{ij}dx^i dx^j \tag{4.35}$$

$$= (-N^2 + N_i N^i)dtdt \tag{4.36}$$

$$+h_{ij}N^i dtdx^j + h_{ij}N^i dtdx^j \tag{4.37}$$

$$+h_{ij}dx^i dx^j \ , \tag{4.38}$$

e obtemos a *2-forma métrica do formalismo ADM.*

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2 dtdt + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \ . \tag{4.39}$$

Esse resultado chave é o verdadeiro início do formalismo ADM, a partir daqui podem ser derivadas as equações de Hamilton para a Relatividade Geral e outras teorias de gravitação. Agora passemos a procurar a 2-forma dual da métrica. Suponha que a métrica dual tenha a forma

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & v^k \\ v^j & b^{jk} \end{pmatrix} . \tag{4.40}$$

Por definição, o produto interno das duas matrizes tem que ser a matriz identidade, ou

$$\begin{pmatrix} -N^2 + N^i N_i & N^j \\ N^i & h_{ij} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & v^k \\ v^j & b^{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{ik} \end{pmatrix} . \tag{4.41}$$

Da multiplicação da primeira linha de $g_{\alpha\mu}$ com a primeira coluna de $g^{\alpha\mu}$, temos

$$(-N^2 + N_j N^j)a + N_j v_j = 1 . \tag{4.42}$$

Da multiplicação da segunda linha de $g_{\alpha\mu}$ com a primeira coluna de $g^{\alpha\mu}$, temos

$$aN_i + h_{ij} v^j = 0 \Rightarrow aN_i = v_i . \tag{4.43}$$

Daí, temos

$$(-N^2 + N_j N^j)a - aN_j N^j = 1 . \tag{4.44}$$

Das equações (4.43) e (4.44), temos que $a = -\frac{1}{N^2}$ e $v^j = \frac{N^j}{N^2}$. Da multiplicação da segunda linha de $g_{\alpha\mu}$ com a segunda coluna de $g^{\alpha\mu}$ temos que

$$N_i v^k + h_{ij} b^{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \delta_{ik} - \frac{N_i N^k}{N^2} , \tag{4.45}$$

ou

$$b^{ij} = h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} . \tag{4.46}$$

Logo, a matriz métrica dual de $g_{\alpha\mu}$ é

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} . \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

Utilizando a regra de Cramer [39] é possível estabelecer o determinante da métrica ADM do espaço-tempo. Primeiro, denotemos $g = det(g_{\alpha\beta})$ e $h = det(h_{ij})$. Observe que g e h são independentes das coordenadas.

Da regra de Cramer

$$g^{00} = \frac{C_{00}}{g} = \frac{h}{g} \ . \tag{4.48}$$

Daí, temos que

$$\frac{h}{g} = -\frac{1}{N^2} \ . \tag{4.49}$$

Portanto, a relação entre o determinante da métrica do espaço tempo no formalismo usual e o determinante da métrica induzida é

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} \ . \tag{4.50}$$

4.3 Relações de Curvatura

A curvatura do espaço-tempo é completamente descrita pelas curvaturas intrínseca (4.14) e extrínseca (4.13) de Σ, da mesma forma que a métrica induzida $h_{\alpha\beta}$ e o vetor normal n^μ descrevem a métrica $g_{\mu\nu}$. Somente as quantidades de 3-curvatura por si só não descrevem toda a informação sobre a curvatura da variedade foliada, como é possível mostrar através da contagem de componentes independentes: O tensor de Riemann de n dimensões tem $n^2(n^2-1)/12$ componentes independentes, o que resulta em 20 componentes independentes para $n = 4$ e 6 para $n = 3$, tomando o tensor de curvatura extrínseca que fornece mais 6 componentes, temos um total de 12 componentes de 3-curvatura contra 20 de 4-curvatura. Essa aparente contradição é resolvida ao encontrar qual a correspondência entre o tensor de Riemann e os tensores de curvatura intrínseca e extrínseca.

4.3.1 Relações de Gauss

A primeira relação que temos é a *equação de Gauss*

$$h_\alpha^{\ \eta} h_\beta^{\ \phi} h_\kappa^{\ \gamma} h_\sigma^{\ \delta} R^\sigma_{\ \eta\phi\gamma} =^{(3)} R^\delta_{\ \alpha\beta\kappa} + K_{\alpha\kappa} K_\beta^{\ \delta} - K_{\beta\kappa} K_\alpha^{\ \delta} \ , \tag{4.51}$$

que segue de

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta \omega_\kappa &= D_\alpha(h_\beta^{\ \phi} h_\kappa^{\ \eta} \nabla_\delta \omega_\eta) = h_\alpha^{\ \phi} h_\beta^{\ \gamma} h_\kappa^{\ \sigma} \nabla_\phi (h_\gamma^{\ \delta} h_\sigma^{\ \eta} \nabla_\delta \omega_\eta) \\ &= h_\alpha^{\ \phi} h_\beta^{\ \delta} h_\kappa^{\ \sigma} \nabla_\phi \nabla_\delta \omega_\eta + h_\kappa^{\ \eta} (h_\alpha^{\ \phi} h_\beta^{\ \gamma} \nabla_\phi h_\gamma^{\ \delta}) \nabla_\delta \omega_\eta + h_\beta^{\ \delta} (h_\alpha^{\ \phi} h_\kappa^{\ \sigma} \nabla_\phi h_\sigma^{\ \eta}) \nabla_\delta \omega_\eta \ , \end{aligned} \tag{4.52}$$

donde temos que

$$h_\alpha^\phi h_\beta^\gamma \nabla_\phi h_\gamma^\delta = h_\alpha^\phi h_\beta^\gamma \nabla_\phi (g_\beta^\gamma + n_\gamma n^\delta) = n^\delta h_\beta^\gamma \nabla_\alpha n_\gamma = K\alpha\beta n^\delta \tag{4.53}$$

no segundo termo, também

$$h_\beta^\delta (h_\alpha^\phi h_\kappa^\sigma \nabla_\phi h_\sigma^\eta) \nabla_\delta \omega_\eta = h_\beta^\delta K_{\alpha\kappa} n^\eta \nabla_\delta \omega_\eta = -K\alpha\kappa h_\beta^\delta \omega_\eta \nabla_\delta n^\eta = -K_{\alpha\kappa} K_\beta^{\ \eta} \omega_\eta \ . \tag{4.54}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R^\eta_{\ \alpha\beta\kappa}\omega_\eta &= D_\alpha D_\beta \omega_\kappa - D_\beta D_\alpha \omega_\kappa \\ &= h_{\alpha\ \phi} h_\beta^\delta h_\kappa^\eta (\nabla_\phi \nabla_\delta \omega_\eta - \nabla_\delta \nabla_\phi \omega_\eta) - K_{\alpha\kappa} K_\beta^{\ \eta} \omega_\eta + K_{\beta\kappa} K_\alpha^{\ \eta} \omega_\eta \ . \end{aligned} \tag{4.55}$$

O que prova a identidade.

4.3.2 Relações de Codazzi

A *equação de Codazzi*

$$h^\alpha_\eta h^\beta_{\ \phi} h^\kappa_{\ \gamma} R_{\alpha\beta\kappa\delta} n^\delta = D_\eta K_{\phi\gamma} - D_\phi K_{\eta\gamma} \tag{4.56}$$

segue diretamente fazendo

$$\begin{aligned} h^\alpha_\eta h^\beta_{\ \phi} h^\kappa_{\ \gamma} R_{\alpha\beta\kappa\delta} n^\delta &= h^\alpha_\eta h^\beta_{\ \phi} h^\kappa_{\ \gamma} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) n_\kappa \\ &= h^\alpha_\eta h^\beta_{\ \phi} h^\kappa_{\ \gamma} (\nabla_\alpha (g_\beta^\delta \nabla_\delta n_\kappa) - \nabla_\beta (g_\alpha^\delta \nabla_\delta n_\kappa)) \\ &= D_\eta K_{\phi\gamma} - h^\alpha_\eta h^\beta_{\ \phi} h^\kappa_{\ \gamma} \nabla_\alpha (n_\beta n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) - D_\phi K_{\eta\gamma} + h^\alpha_\eta h^\beta_{\ \phi} h^\kappa_{\ \gamma} \nabla_\beta (n_\alpha n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) \\ &= D_\eta K_{\phi\gamma} - D_\phi K_{\eta\gamma} - h^\alpha_\eta h^\beta_{\ \phi} h^\kappa_{\ \gamma} (n^\delta \nabla_\delta n_\kappa)(\nabla_\alpha n_\beta - \nabla_\beta n_\alpha) \ , \end{aligned} \tag{4.57}$$

considerando que o último termo é nulo por conta da simetria da projeção espacial de $\nabla_\alpha n_\beta$, temos demonstrado a relação.

4.3.3 A Relação de Ricci

A *equação de Ricci* é

$$R_{\alpha\kappa\beta\delta} n^\kappa n^\delta = -\mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\kappa} K_\beta^{\ \kappa} + D_{(\alpha} a_{\beta)} + a_\alpha a_\beta \ , \tag{4.58}$$

onde definimos a *aceleração normal* $a_\alpha \equiv n^\kappa \nabla_\kappa n_\alpha$, com $a_\alpha n^\alpha = 0$. Esta equação será deduzida por partes. Primeiro, temos

$$\mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} = n^\kappa \nabla_\kappa K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\kappa} \nabla_\beta n^\kappa + K_{\beta\kappa} \nabla_\alpha n^\kappa \ . \tag{4.59}$$

Usando $K_{\alpha\beta} = h_\alpha^{\ \kappa} \nabla_\kappa n_\beta = \nabla_\alpha n_\beta + n_\alpha n^\kappa \nabla_\kappa n_\beta$, o primeiro termo fica

$$\begin{aligned} n^\kappa \nabla_\kappa K_{\alpha\beta} &= n^\kappa \nabla_\kappa \nabla_\alpha n_\beta + (n^\kappa \nabla_\kappa n_\alpha)(n^\delta \nabla_\delta n_\beta) + n_\alpha n^\kappa \nabla_\kappa (n^\delta \nabla_\delta n_\beta) \\ &= n^\kappa \nabla_\kappa \nabla_\alpha n_\beta + a_\alpha a_\beta - (\nabla_\alpha n^\delta)(\nabla_\delta n_\beta) - n^\delta \nabla_\alpha \nabla_\delta n_\beta + h_\alpha^{\ \kappa} \nabla_\kappa (n^\delta \nabla_\delta n_\beta) \ . \end{aligned}$$

No último termo, onde foi utilizada a relação $n_\alpha n^\kappa = -g_\alpha^{\ \kappa} + h_\alpha^{\ \kappa}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} h_\alpha^{\ \kappa}(h_\beta^{\ \eta} - n_\beta n^\eta) \nabla_\kappa a_\eta &= D_\alpha a_\beta - h_\alpha^{\ \kappa} n_\beta n^\eta \nabla_\kappa a_\eta \\ &= D_\alpha a_\beta + n_\beta a_\eta \nabla_\alpha n^\eta + n_\alpha n^\kappa n_\beta a_\eta \nabla_\kappa n^\eta \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} n^\kappa \nabla_\kappa K_{\alpha\beta} &= n^\kappa (\nabla_\kappa \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\kappa) n_\beta + a_\alpha a_\beta + D_\alpha a_\beta - (\nabla_\alpha n^\delta)(\nabla_\delta n_\beta) \\ &\quad + n_\beta \nabla_\alpha n^\eta (n^\kappa \nabla_\kappa n_\eta) + n_\alpha n_\beta (n^\kappa \nabla_\kappa n^\eta)(n^\delta \nabla_\delta n_\eta) \ . \end{aligned}$$

Os dois últimos termos de $\mathcal{L}_n K_{\alpha\beta}$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} K_{\alpha\kappa} \nabla_\beta n^\kappa + K_{\beta\kappa} \nabla_\alpha n^\kappa &= (\nabla_\alpha n_\kappa)(\nabla_\beta n^\kappa) + n_\beta n^\kappa (\nabla_\kappa n^\delta)(\nabla_\alpha n_\delta) + K_{\alpha\kappa}(K_\beta^{\ \kappa} - n_\beta n^\delta \nabla_\delta n^\kappa) \\ &= (\nabla_\alpha n_\kappa)(\nabla_\beta n^\kappa) + K_{\alpha\kappa} K_\beta^{\ \kappa} - n_\alpha n^\delta (\nabla_\delta n_\kappa) n_\beta n^\eta \nabla_\eta n^\kappa \ . \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} & (\nabla_\alpha n_\kappa)(\nabla_\beta n^\kappa) - (\nabla_\alpha n^\delta)(\nabla_\delta n_\beta) + n_\beta \nabla_\alpha n^\eta (n^\kappa \nabla_\kappa n_\eta) \\ = \ & (\nabla_\alpha n^\kappa)(\nabla_\beta n_\kappa - \nabla_\kappa n_\beta + n_\beta n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) \\ = \ & (\nabla_\alpha n^\kappa)(h_\beta^{\ \delta}(\nabla_\delta n_\kappa - \nabla_\kappa n_\delta) + n_\beta n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) = 0 \ , \end{aligned}$$

onde utilizamos na primeira linha o fato de n_a ser normalizado para sumir com o último termo, e

$$\begin{aligned} h_\beta^\delta(\nabla_\delta n_\kappa - \nabla_\kappa n_\delta) &= h_\beta^\delta h_\kappa^\eta(\nabla_\delta n_\eta - \nabla_\eta n_\delta) - h_\beta^\delta n_\kappa n^\eta(\nabla_\delta n_\eta - \nabla_\eta n_\delta) \\ &= -n_\kappa n^\eta \nabla_\eta n_\beta \ , \end{aligned}$$

para zerar o resto.

Reagrupando os termos obtemos a equação de Ricci.

4.3.4 Escalar de Curvatura no Formalismo ADM

Primeiro chamamos atenção à importante relação

$$R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = (K_\alpha^{\ \alpha})^2 - K_\alpha^{\ \beta} K_\beta^{\ \alpha} + \nabla_\alpha v^\alpha \ . \tag{4.60}$$

A relação (4.60) segue diretamente de

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta &= R_{\alpha\kappa\beta}^{\ \ \ \ \kappa} n^\alpha n^\beta = -n^\alpha(\nabla_\alpha\nabla_\kappa - \nabla_\kappa\nabla_\alpha) - n^\kappa \\ &= (\nabla_\alpha n^\alpha)(\nabla_\kappa n^\kappa) - (\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\kappa) - \nabla_\alpha(n^\alpha \nabla_\kappa n^\kappa) + \nabla_\kappa(n^\alpha \nabla_\alpha n^\kappa) \ , \end{aligned}$$

usando

$$\begin{aligned} (\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\kappa) &= g_\alpha^\delta g_\eta^{\ \kappa}(\nabla_\kappa n^\delta)(\nabla_\delta n^\kappa) \\ &= (h_\eta^{\ \kappa}\nabla_\kappa n^\alpha)(h_\alpha^\delta \nabla_\delta n^\eta) - h_\alpha^\delta n^\kappa n_\kappa(\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\delta n^\kappa) \\ &\quad h_\eta^{\ \kappa} n^\alpha n_\delta(\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\delta n^\kappa) + n_\alpha n^\delta n^\kappa n_\eta(\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\delta n^\kappa) \\ &= K_\eta^{\ \alpha} K_\alpha^{\ \eta} \ . \end{aligned}$$

Analogamente $(\nabla_\alpha n^\alpha)(\nabla_\kappa n^\kappa) = (K_\eta^{\ \alpha})(K_\alpha^{\ \eta}) = (K_\alpha^{\ \alpha})^2$ e o resultado segue notando que $v^\alpha = -n^\alpha \nabla_\kappa n^\kappa + n^\kappa \nabla_\kappa n^\alpha$.

Agora, passando para o cálculo do escalar de curvatura

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} g^{\kappa\delta} R_{\alpha\kappa\beta\delta} = (h^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta)(h^{\kappa\delta} - n^\kappa n^\delta) R_{\alpha\kappa\beta\delta} \\ &= h^{\alpha\beta} h^{\kappa\delta} R_{\alpha\kappa\beta\delta} - 2R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta \\ &= h^{\eta\varphi} h^{\gamma\sigma} h_\eta^{\ \alpha} h_\varphi^{\ \beta} h_\gamma^{\ \kappa} h_\sigma^{\ \delta} R_{\alpha\kappa\beta\delta} - 2R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta \\ &= h^{\eta\varphi}[{}^{(3)}R_{\eta\gamma\varphi}^{\ \ \ \ \gamma} + K_{\eta\varphi}K_\gamma^{\ \gamma} - K_{\gamma\varphi}K_\eta^{\ \gamma}] - 2[(K_\alpha^{\ \alpha})^2 - K_\beta^{\ \alpha} K_\alpha^{\ \beta} + \nabla_\alpha v^\alpha] \ , \end{aligned}$$

onde utilizamos a equações (4.51) e (4.60). Portanto, o *escalar de Ricci no formalismo ADM* é

$$R =^{(3)} R - (K_{\alpha}^{\ \alpha})^2 + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - 2\nabla_{\alpha}v^{\alpha} \ . \tag{4.61}$$

Capítulo 5

Gravitações Canônicas no Formalismo Simplético

5.1 Teoria da Relatividade Geral Canônica

A relatividade geral é a teoria que descreve o espaço-tempo e a gravitação. Suas equações revelam a descrição matemática da dinâmica do tecido espaço-temporal, por ser essencialmente geométrica, a relatividade geral se diferencia fundamentalmente das outras teorias de campo de calibre. Nesta seção mostramos como a relatividade geral pode ser escrita e resolvida pelo mesmo formalismo canônico em que outras outras teorias de campo são escritas. Aqui seguimos a abordagem simplética da relatividade geral, e esta aplicação é aqui feita pela primeira vez no contexto da formulação sistemática de BW.

No contexto da formulação original de FJ, o formalismo simplético foi aplicado à relatividade geral em [40]. Entretanto, devido à falta de sistemática, em teorias mais complexas a extensão iterativa proposta de BW é naturalmente mais conveniente. Avanços no sentido da aplicação da proposta de BW à relatividade geral foram recentemente atingidos em alguns artigos recentes [23], [24], contudo o formalismo não foi empregado em sua totalidade, pois somente parte da matriz pré-simplética foi analisada.

Escrever teorias de gravitação em termos de geometria simplética pode evidenciar detalhes que não estejam explícitos no esquema canônico de Dirac para sistemas vinculados. Usamos o algoritmo BW para procurar as simetrias de calibre e contar os graus de liberdade da teoria.

Até a obtenção do potencial simplético os principais resultados abaixo podem ser encontrados em [37].

Utilizamos a equação (4.61) para escrever a ação de Einstein-Hilbert, a menos de um termo de superfície, como

$$L[h_{ij},\ N,\ N^i] = \frac{1}{2\kappa}\int d^3xN\sqrt{h}\left[{}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - (K^a{}_a)^2\right] \ . \tag{5.1}$$

Os campos da teoria são N, N^a e h^{ab}. A lagrangiana não é linear nas velocidades. Por conveniência, pela maior proximidade explícita com o formalismo de Dirac, escolhemos usar os momentos para linearizar a lagrangiana.

Os momentos conjugados aos campos que compõem a teoria são

$$\Pi_N = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}} = 0 \ , \tag{5.2}$$

$$\Pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}}^a = 0 \ , \tag{5.3}$$

$$\Pi_{ab} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}^{ab}} = \frac{1}{2N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K^{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\left(K_{ab} - K^c{}_c\, h_{ab}\right) \ , \tag{5.4}$$

de modo que, temos usado $K_{ab} = \frac{1}{N}\left(\dot{h}_{ab}D_{(a}N_{b)}\right)$. Levando em conta

$$\Pi^a{}_a = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\left(K^a{}_a - 3K^c{}_c\right) = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\left(-2K^a{}_a\right) \ , \tag{5.5}$$

resultando

$$K^a{}_a = -\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\frac{\Pi^c{}_c}{2} \ , \tag{5.6}$$

e, notando que

$$K^{ab} = \frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\Pi^{ab} + K^c{}_c\, h^{ab} = \frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\left(\Pi^{ab} - \frac{\Pi^c{}_c}{2}h^{ab}\right) \ , \tag{5.7}$$

vemos que

$$\dot{h}_{ab} = 2N\left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\right)\left(\Pi_{ab} - \frac{\Pi^c{}_c}{2}h_{ab}\right) + 2D_{(a}N_{b)} \ . \tag{5.8}$$

Considerando a Hamiltoniana como o potencial de ordem zero, isto é, $V^{(0)} \equiv H$, temos que

$$V^{(0)} = \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\right) N \left(2\Pi^{ab} - \Pi^{c}{}_{c}\, h^{ab}\right) \Pi_{ab} - 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} - \\ -N\left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)\left[{}^{(3)}R + K^{ab}{}_{ab}\left(K^{c}{}_{c}\right)^{2}\right] . \tag{5.9}$$

Mas

$$\begin{aligned}\Pi^{ab}\Pi_{ab} &= \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)^{2}\left(K^{ab} - K^{c}{}_{c}\, h^{ab}\right)\left(K_{ab} - K^{c}{}_{c}\, h_{ab}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)^{2}\left(K_{ab}K^{ab} - K^{c}{}_{c}\, K^{ab}h_{ab} - K^{c}{}_{c}\, K_{ab}h^{ab} + 3\left(K^{c}{}_{c}\right)^{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)^{2}\left(K_{ab}K^{ab} - 2\left(K^{c}{}_{c}\right)^{2} + 3\left(K^{c}{}_{c}\right)^{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)^{2}\left(K_{ab}K^{ab} + \left(K^{c}{}_{c}\right)^{2}\right) .\end{aligned} \tag{5.10}$$

Então

$$\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\left(2\Pi_{ab}\Pi^{ab} - \left(\Pi^{c}{}_{c}\right)^{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)\left(2K_{ab}K^{ab} + 2\left(K^{a}{}_{a}\right)^{2} - 4\left(K^{a}{}_{a}\right)^{2}\right) , \tag{5.11}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\right)\left(2\Pi_{ab}\Pi^{ab} - \left(\Pi^{c}{}_{c}\right)^{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)\left(K_{ab}K^{ab} - \left(K^{a}{}_{a}\right)^{2}\right) . \tag{5.12}$$

Assim, reescrevendo o potencial utilizando somente as variáveis do espaço de fase,

$$V^{(0)} = \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\right) N\left[\Pi_{ab}\Pi^{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{c}{}_{c}\right)^{2}\right] + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} - N\left(\frac{\sqrt{h}}{\kappa}\right)\ {}^{(3)}R . \tag{5.13}$$

E a densidade de Lagrangiana da iteração zero é então

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{h}^{ab}\Pi_{ab} - \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\right) N\left[\Pi_{ab}\Pi^{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{c}{}_{c}\right)^{2}\right] + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} - N\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\ {}^{(3)}R . \tag{5.14}$$

Assim, o vetor simplético é

$$\left(\xi^{\beta(ij)(0)}\right) = \begin{pmatrix} N & N^{i} & h^{ij} & \Pi & \Pi_{i} & \Pi_{ij}\end{pmatrix} . \tag{5.15}$$

O vetor ξ^α é definido tal que $\xi^1 = N$, $\xi^{2(i)} = N^i$, $\xi^{3(ij)} = h^{ij}$. E a 1-forma simplética é

$$(a^{(0)}_{\alpha(kl)})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0_k & \Pi_{kl} & 0 & 0^k & 0^{kl} \end{pmatrix} . \tag{5.16}$$

A matriz pré-simplética é construída a partir de

$$f_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{\delta a_\alpha(x)}{\delta \xi^\beta(y)} - \frac{\delta a_\beta(y)}{\delta \xi^\alpha(x)} . \tag{5.17}$$

Em particular,

$$\frac{\delta a_\beta{}^{(0)}(y)}{\delta \xi^{\alpha(0)}(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 0_k & 0_{kl} & 0 & 0^k & 0^{kl} \\ 0_i & 0_{ik} & 0_{ikl} & 0_i & 0^k_i & 0^{kl}_i \\ 0_{ij} & 0_{ijk} & 0_{ijkl} & 0_{ij} & 0^k_{ij} & 0 \\ 0 & 0_k & 0_{kl} & 0 & 0^k & 0^{kl} \\ 0^i & 0^i_k & 0^i_{kl} & 0^i & 0^{ik} & 0^{ikl} \\ 0^{ij} & 0^{ij} & \delta^{ij}_{kl}(x,y) & 0^{ij} & 0^{ijk} & 0^{ijkl} \end{pmatrix} , \tag{5.18}$$

onde $\delta^{kl}_{ij}(x,y) = \delta^{kl}_{ij}\delta^3(x-y)$ e $\delta^{kl}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^k_i\delta^l_j + \delta^l_i\delta^k_j)$. Logo, a matriz pré-simplética de ordem zero é

$$(f^{(0)}_{\alpha(ij)\beta(kl)})(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0_k & 0_{kl} & 0 & 0^k & 0^{kl} \\ 0_i & 0_{ik} & 0_{ikl} & 0_i & 0^k_i & 0^{kl}_i \\ 0_{ij} & 0_{ijk} & 0_{ijkl} & 0_{ij} & 0^k_{ij} & \delta^{ij}_{kl}(x,y) \\ 0 & 0_k & 0_{kl} & 0 & 0^k & 0^{kl} \\ 0^i & 0^i_k & 0^i_{kl} & 0^i & 0^{ik} & 0^{ikl} \\ 0^{ij} & 0^{ij} & -\delta^{ij}_{kl}(x,y) & 0^{ij} & 0^{ijk} & 0^{ijkl} \end{pmatrix} . \tag{5.19}$$

A matriz tem 4 modos-zero no espaço $\alpha\beta$, mas considerando os índices internos o total de modos-zero é, na realidade, $2 \times 1 + 2 \times 3 = 8$. São eles

$$\nu^{\alpha(ij)}_{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 0^i & 0^{ij} & 0 & 0_i & 0_{ij} \end{pmatrix} , \tag{5.20}$$

$$\nu^{\alpha(ij)}_{[2]p} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^i_p & 0^{ij} & 0 & 0_i & 0_{ij} \end{pmatrix} , \tag{5.21}$$

$$\nu^{\alpha(ij)}_{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0^i & 0^{ij} & 1 & 0_i & 0_{ij} \end{pmatrix} , \tag{5.22}$$

$$\nu^{\alpha(ij)}_{[4]p} = \begin{pmatrix} 0 & 0^i & 0^{ij} & 0 & \delta^i_p & 0_{ij} \end{pmatrix} , \tag{5.23}$$

onde $p = 1,\ 2,\ 3$.

A condição de consistência deve ser satisfeita. Para o modo-zero $\nu_{[1]}$ encontramos

$$\begin{aligned}\int \frac{\delta V^{(0)}}{\delta N(x)} d^3y &= \int \Bigg\{ \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \right) \left[\Pi_{ab}\Pi^{ab} - \frac{1}{2} \left(\Pi^c{}_c \right)^2 \right] \\ &- \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \right) {}^3R \Bigg\} \delta^3(y-x) d^3y = 0 \ .\end{aligned} \tag{5.24}$$

Daí definimos o vínculo Hamiltoniano como

$$\Omega \equiv \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \left[\Pi_{ab}\Pi^{ab} - \frac{1}{2} \left(\Pi^c{}_c \right)^2 \right] - \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \right) {}^{(3)}R \ . \tag{5.25}$$

Para o modo-zero $\nu_{[2p]}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\delta}{\delta N^a(x)} \left(2D_{(c}N^{b)}\Pi^c{}_b \right)(y) d^3y &= \int 2 \frac{\delta}{\delta N^a} \left(D_b N^c \Pi^b{}_c \right) d^3y \\ &= -\int 2 \frac{\delta}{\delta N^a} \left(N^c D_b \Pi^b{}_c \right) d^3y \\ &= -2 \int \delta^c_a (y-x) D_b \Pi^b{}_c \, (y) d^3y \\ &= -2D_b\Pi^b{}_a(x) = 0 \ .\end{aligned} \tag{5.26}$$

É oportuno comentar que a integração por partes na penúltima linha só é possível pois $\Pi^b{}_a$ é um tensor densidade em Σ , — o termo $\sqrt{h}$ está incorporado nele — enquanto N^a é vetor em Σ.

Do cálculo acima definimos o vínculo de difeomorfismo

$$\Omega_a \equiv -2D_b\Pi^b{}_a \ . \tag{5.27}$$

Em geral, se a condição de consistência for identicamente nula para um certo modo-zero, então existe uma simetria de calibre dada por (3.36)

$$\delta\xi^\alpha(x) = \int \varepsilon(y)\nu^\alpha(y)\delta^3(x-y)d^3y \ , \tag{5.28}$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal arbitrário. Os modos-zero $\nu_{(3)}$ e $\nu_{(4p)}$ levam às seguintes "simetrias de calibre" triviais, onde ι e η^i são parâmetros infinitesimais arbitrários,

$$\delta\Pi = \iota, \tag{5.29}$$

$$\delta\Pi^i = \eta^i. \tag{5.30}$$

Essas são simetrias de calibre triviais, uma vez que nem Π nem Π^i aparecem na lagrangiana.

Agora vamos estabelecer o potencial simplético impondo o potencial de ordem zero na superfície de vínculo

$$V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega} = 0 \; . \tag{5.31}$$

Impondo a derivada temporal do campo como multiplicador de Lagrange, como dita o método, temos que a densidade de Lagrangiana de primeira ordem é

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{h}^{ij}\Pi_{ij} + \dot{\lambda}\Omega + \dot{\kappa}^i\Omega_i \; . \tag{5.32}$$

De modo que o vetor pré-simplético de ordem 1 é

$$(\xi^{\beta(ij)(1)}) = \begin{pmatrix} h^{ij} & \Pi_{ij} & \lambda & \kappa^i \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

e a 1-forma simplética de ordem 1 é

$$(a^{(1)}_{\alpha(kl)})^T = \begin{pmatrix} \Pi_{kl} & 0^{kl} & \Omega & \Omega_k \end{pmatrix} \; . \tag{5.34}$$

Onde foram omitidos os campos que não aparecem na lagrangiana de ordem 1. Assim, a matriz de primeira ordem pré-simplética fica

$$(f^{(1)}_{\alpha(ij)\beta(kl)})(x,y) = \begin{pmatrix} 0_{ijkl} & \delta^{kl}_{ij}(x,y) & -\dfrac{\delta\Omega(y)}{\delta h^{ij}(x)} & -\dfrac{\delta\Omega_k(y)}{\delta h^{ij}(x)} \\ -\delta^{ij}_{kl}(x,y) & 0^{ijkl} & -\dfrac{\delta\Omega(y)}{\delta\Pi_{ij}(x)} & -\dfrac{\delta\Omega_k(y)}{\delta\Pi_{ij}(x)} \\ \dfrac{\delta\Omega(x)}{\delta h^{kl}(y)} & \dfrac{\delta\Omega(x)}{\delta\Pi_{kl}(y)} & 0 & 0_k \\ \dfrac{\delta\Omega_i(x)}{\delta h^{kl}(y)} & \dfrac{\delta\Omega_i(x)}{\delta\Pi_{kl}(y)} & 0_i & 0_{ik} \end{pmatrix} \; . \tag{5.35}$$

Agora, o passo a ser dado é encontrar os modos-zero dessa matriz, estabelecer se existe algum vínculo e saber se ele gera transformações de calibre. Como o potencial da lagrangiana de grau um é nulo, $V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega}$, o modo-zero da matriz pré-simplética de grau um necessariamente irá levar a uma liberdade de calibre da teoria.

Do cálculo do determinante da matriz simplética $f^{(1)}$ temos que não existem novos modos zero associados à teoria, entretanto isso vai de encontro ao estabelecido para relatividade geral, uma teoria que apresenta invariância por difeomorfismos. Porém, devido à semelhança entre as matrizes (pré)-simpléticas (3.23) e (5.35), podemos construir um *ansatz* semelhantemente ao sugerido em [13] para uma matriz pré-simplética similar, dessa forma podemos supor a existência de modos-zero do tipo

$$\nu_{[5]}^{\alpha(ij)}(x) = \begin{pmatrix} \int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Pi_{ij}(x)} & -\int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta h^{ij}(x)} & -1 & 0^i \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

e

$$\nu_{[6]p}^{\alpha(ij)}(x) = \begin{pmatrix} \int d^3z \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta\Pi_{ij}(x)} & -\int d^3z \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta h^{ij}(x)} & 0 & -\delta_p^i \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

como modos zero de segunda interação. Contraindo os vetores (5.36) com a matriz (5.35), utilizando os parênteses de Poisson calculados por Dirac [4], obtemos

$$\left(\int d^3x \; \nu_{[5]}^{\alpha(ij)}(x) f_{\alpha(ij)\beta(kl)}(x,y) \right) . \tag{5.38}$$

Resolvendo cada termo separadamente

$$\begin{aligned}
(\nu_5 \cdot f)_1 &= \int\int d^3z d^3x \, \frac{\delta\Omega(z)}{\delta h^{ij}(x)} \delta_{kl}^{ij}(x,y) - \int d^3x \frac{\delta\Omega(x)}{\delta h^{ij}(y)} \qquad (5.39)\\
&= \int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta h^{kl}(y)} - \int d^3x \frac{\delta\Omega(x)}{\delta h^{kl}(y)} = 0_{kl} \; ;\\
(\nu_5 \cdot f)_2 &= \int\int d^3z d^3x \, \frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Pi_{ij}(x)} \delta_{kl}^{ij}(x,y) - \int d^3x \frac{\delta\Omega(x)}{\delta\Pi_{ij}(y)} \qquad (5.40)\\
&= \int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Pi_{kl}(y)} - \int d^3x \frac{\delta\Omega(x)}{\delta\Pi_{kl}(y)} = 0_{kl} \; ;\\
(\nu_5 \cdot f)_3 &= \int\int d^3z d^3x \, \left[-\frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Pi_{ij}(x)} \frac{\delta\Omega(y)}{\delta h^{ij}(x)} \delta_{kl}^{ij}(x,y) + \frac{\delta\Omega(z)}{\delta h^{ij}(x)} \frac{\delta\Omega(y)}{\delta\Pi_{ij}(x)} \right] \qquad (5.41)\\
&= \{ \int d^3z \; \Omega(z) \, , \Omega(y) \} \approx 0 \; ;\\
(\nu_5 \cdot f)_4 &= \int\int d^3z d^3x \, \left[-\frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Pi_{ij}(x)} \frac{\delta\Omega_k(y)}{\delta h^{ij}(x)} \delta_{kl}^{ij}(x,y) + \frac{\delta\Omega(z)}{\delta h^{ij}(x)} \frac{\delta\Omega_k(y)}{\delta\Pi_{ij}(x)} \right] \qquad (5.42)\\
&= \{ \int d^3z \; \Omega(z) \, , \Omega_k(y) \} \approx 0_k \; ;
\end{aligned}$$

Onde usamos (A.14). Ou seja,

$$\begin{aligned}
\left(\int d^3x \; \nu_{[5]}^{\alpha(ij)}(x) f_{\alpha(ij)\beta(kl)}(x,y) \right) &= \qquad (5.43)\\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \{\int d^3z \, \Omega(z), \Omega(y)\} & \{\int d^3z \, \Omega(z), \Omega_k(y)\} \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Da mesma forma, contraindo (5.37) com (5.35) e resolvendo cada elemento do vetor resultante separadamente, temos

$$
\begin{aligned}
(\nu_{6p}\cdot f)_1 &= \int\int d^3z d^3x \,\frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta h^{ij}(x)}\delta^{ij}_{kl}(x,y) - \int d^3x \frac{\delta\Omega_i(x)}{\delta h^{ij}(y)}\delta^i_p && (5.44)\\
&= \int d^3z \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta h^{kl}(y)} - \int d^3x \frac{\delta\Omega_p(x)}{\delta h^{kl}(y)} = 0_{kl}\ ;\\
(\nu_{6p}\cdot f)_2 &= \int\int d^3z d^3x \,\frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta \Pi_{ij}(x)}\delta^{ij}_{kl}(x,y) - \int d^3x \frac{\delta\Omega_i(x)}{\delta \Pi_{ij}(y)}\delta^i_p && (5.45)\\
&= \int d^3z \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta \Pi_{kl}(y)} - \int d^3x \frac{\delta\Omega_p(x)}{\delta \Pi_{kl}(y)} = 0_{kl}\ ;\\
(\nu_{6p}\cdot f)_3 &= \int\int d^3z d^3x \left[-\frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta \Pi_{ij}(x)}\frac{\delta\Omega(y)}{\delta h^{ij}(x)}\delta^{ij}_{kl}(x,y) + \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta h^{ij}(x)}\frac{\delta\Omega(y)}{\delta \Pi_{ij}(x)}\right] && (5.46)\\
&= \{\int d^3z\ \Omega_p(z)\ , \Omega(y)\} \approx 0\ ;\\
(\nu_{6p}\cdot f)_4 &= \int\int d^3z d^3x \left[-\frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta \Pi_{ij}(x)}\frac{\delta\Omega_k(y)}{\delta h^{ij}(x)}\delta^{ij}_{kl}(x,y) + \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta h^{ij}(x)}\frac{\delta\Omega_k(y)}{\delta \Pi_{ij}(x)}\right] && (5.47)\\
&= \{\int d^3z\ \Omega_p(z)\ , \Omega_k(y)\} \approx 0_{pk}\ ;
\end{aligned}
$$

Onde usamos (A.14). Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\left(\int d^3y\ \nu^{\alpha(ij)}_{[6]p}(x) f_{\alpha(ij)\beta(kl)}(x,y)\right) &= && (5.48)\\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \{\int d^3z\, \Omega_p(z), \Omega(y)\} & \{\int d^3z\, \Omega_p(z), \Omega_k(y)\}\end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

De maneira que os candidatos (5.36) e (5.37) funcionam como uma espécie de “modos-zero” na superfície de vínculos. Isso sugere a existência transformações de calibre válidas somente na superfície de vínculos. Assumindo que de fato isto ocorra, temos, de (3.36),

$$
\begin{aligned}
\delta_\varepsilon h_{ij}(x) &= -\int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Pi^{ij}(x)}\varepsilon(z)\\
&= -\int d^3z \frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\left(\Pi_{ij}(z) - \frac{1}{2}h_{ij}(z)\Pi_a{}^a(z)\right)\\
&= \int d^3z(-2K_{ij}(z))\varepsilon\ \delta^3(z-x)\\
\delta_\varepsilon h_{ij}(x) &= -2\varepsilon K_{ij}(x) && (5.49)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\delta_{\varepsilon_b} h_{ij}(x) &= \int d^3z \frac{\delta\Omega^b(z)}{\delta\Pi^{ij}(x)}\varepsilon(z) = \int d^3z \frac{\delta}{\delta\Pi^{ij}(x)}(\Pi^{ab}(z)D_a\varepsilon_b) \\
&= 2\int d^3z D_a(h_{bc}\varepsilon^c)(z)\delta^{ab}_{ij}(z,x) \\
&= 2\int d^3z h_{bc}(\partial_a\varepsilon^c + G^c_{ad}\varepsilon^d)(z)\delta^{ab}_{ij}(z,x) = 2\int d^3z(h_{bc}\partial_a\varepsilon^c + (h_{bc}\frac{1}{2}\left[h^{cf}_{ad}\right. \\
&\quad (\partial_a h_{df} + \partial_d h_{af} - \partial_f h_{ad}]\,\varepsilon^d)(z))\delta^{ab}_{ij}(z,x) \\
&= 2\int d^3z \left[h_{bc}\partial_a\varepsilon^c + \frac{1}{2}(\partial_a h_{bd} + \partial_d h_{ab} - \partial_b h_{ad})\right](z)\;\delta^{ab}_{ij}(z,x) \\
&= 2\int d^3z \left(\frac{1}{2}(h_{bc}\partial_a\varepsilon^c + h_{ac}\partial_d\varepsilon^c) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad})\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +\partial_d h_{ab} - \frac{1}{2}(\partial_b h_{ad} + \partial_a h_{bd})\right]\varepsilon^d\right)(z)\delta^{ab}_{ij}(z,x) \\
&= \int d^3z(h_{bc}\partial_a\varepsilon^c + h_{ac}\partial_b\varepsilon^c + \varepsilon^d\partial_d h_{ab})(z)\delta^{ab}_{ij}(z,x) \\
\delta_{\varepsilon_b} h_{ij}(x) &= \varepsilon^d\partial_d h_{ij} + h_{jc}\partial_i\varepsilon^c + h_{ic}\partial_j\varepsilon^c.
\end{aligned} \tag{5.50}
$$

Portanto, a transformação do campo h^{ij} que apresenta invariância de calibre fornecida pelo formalismo simplético é

$$
\delta_{\varepsilon^\mu} h_{ij}(x) = -2\varepsilon K_{ij}(x) + \varepsilon^d(x)\partial_d h_{ij}(x) + h_{jc}(x)\partial_i\varepsilon^c(x) + h_{ic}(x)\partial_j\varepsilon^c(x)\;, \tag{5.51}
$$

que representa exatamente a invariância por difeomorfismo em relatividade geral no formalismo ADM [41], em concordância com o obtido no formalismo *à la* Dirac [42], [43].

Esse fato, que parece estranho a primeira vista, na verdade é uma consequência da aplicação do formalismo ADM e já havia sido estabelecido em outros trabalhos [44], seguidas de demais discussões sobre os fundamentos da teoria da gravitação de Einstein [45], [46]. Ocorre que a necessária fixação arbitrária de superfícies “espaciais” e vetores "temporais", bem como a fixação de um sistema de coordenadas arbitrário, são condições fortes e impõem alguma limitação. Um difeomorfismo aplicado a função lapso, por exemplo, em geral torce a hipersuperfície espacial e altera a direção do vetor normal, o que faz com que a teoria da RG canônica apresente uma estrutura de vínculos que não fornece um grupo verdadeiro [44].

É digno de nota que o formalismo simplético, desenvolvido conforme o algorítimo BW, tenha chegado a esse resultado de forma natural e direta, dispensando uma análise mais minuciosa da teoria como ocorre se contamos apenas com o formalismo de Dirac.

Se inserirmos os campos N e N^i no vetor simplético $\xi^{(1)}$ iremos obter que existe uma simetria de calibre trivial tal como exibido em (5.29),

$$\delta N = \varepsilon^4 \ , \tag{5.52}$$

$$\delta N^i = \varepsilon^{4+i}. \tag{5.53}$$

Entretanto, os parâmetros de calibre dessas transformações não são independentes, eles dependem dos próprios parâmetros de calibre ε e ε^i associados à h_{ij}. A relação explícita entre eles pode ser obtida usando um método ***à la*** Dirac [41] e resulta nas transformações invariantes

$$\delta N(x) = [\dot{\varepsilon} + \varepsilon^s \partial_s N - N^i \partial_i \varepsilon](x) \ , \tag{5.54}$$

$$\delta N^i(x) = [\dot{\varepsilon}^i + \varepsilon^s \partial_s N^i - N^l \partial_l \varepsilon^i - N g^{ri} \partial_r \varepsilon + \varepsilon g^{ri} \partial_r N](x). \tag{5.55}$$

Agora analisamos o número de campos independentes em Relatividade Geral segundo o esquema simplético. Temos que o número de graus de liberdade da teoria é igual a: (número de campos iniciais - o número de modos-zero - o número de vínculos)$/2$, nesse caso temos (20 (campos iniciais) $- 8$ $(\nu_1,\ \nu_{2p},\ \nu_3,\ \nu_{4p}) - 4$ $(\nu_5,\ \nu_{6p}) - 4$ $(1$ vínculo hamiltoniano mais 3 vínculos de difeomorfismo) $)/2 = 2$ graus de liberdade.

5.2 Teoria Canônica da Gravitação de Brans-Dicke

Através da teoria da relatividade geral de Einstein obtemos uma representação elegante e concisa da gravitação. O espaço e o tempo perdem seus status de entidades absolutas e se tornam quantidades dinâmicas que fluem e têm comportamento afetado pela distribuição de matéria na região.

A teoria de Einstein prova seu sucesso por medidas que não podiam ser obtidas pela gravitação newtoniana [36]. Mas, além disso, a relatividade geral abriu caminho para se estudar o universo como um sistema dinâmico, acabando por criar uma ciência crucial no esquema fundamental da descrição física da natureza.

Ironicamente, ou talvez como era de se esperar, a própria cosmologia passou a sugerir que a relatividade geral poderia não ser a descrição definitiva do espaço-tempo. Problemas como a singularidade do Big-Bang e o problema do horizonte e da planura trouxeram a atenção para teorias alternativas da gravitação.

Trataremos aqui a teoria de Brans-Dicke, protótipo das teorias escalares-tensoriais [47]. Partimos da Lagrangiana da Brans-Dicke, fazemos a foliação $3+1$ da teoria, aplicamos o algoritmo BW e finalizamos apresentando as transformações de calibre da teoria e fazendo a contagem dos graus de liberdade.

A foliação da teoria de Brans-Dicke que se segue foi obtida em [48], [49] e [50] e agora é apresentada em seus detalhes.

Da a ação de Brans-Dicke [51]

$$S\left[g^{\mu\nu},\phi\right]=\int_{\Sigma}d^{4}x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(\phi\,{}^{(4)}R-\frac{\omega(\phi)}{\phi}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi\right)-V(\phi)\right]\ , \tag{5.56}$$

onde fizemos $8\pi G=1$. Por foliação $3+1$, o escalar de Ricci ${}^{(4)}R$ é dado por

$${}^{(4)}R=K_{ab}K^{ab}-K^{2}+{}^{(3)}R-2\nabla_{c}\left(n^{c}\nabla_{a}n^{a}-n^{a}\nabla_{a}n^{c}\right)\ , \tag{5.57}$$

sendo $K_{ab}=h_{a}{}^{c}\ h_{b}{}^{a}\ \nabla_{c}n_{d}$, $K=K_{ab}h^{ab}$ e ${}^{(3)}R$ o escalar de curvatura tridimensional, conforme definido no capítulo 4.

E podemos reescrever a ação de Brans-Dicke na forma foliada $3+1$ como

$$\begin{aligned}L\ =\ &\int d^{4}x\ N\sqrt{h}\Big\{\frac{1}{2}\phi\left[{}^{(3)}R+K_{ab}K^{ab}-K^{2}-2\left(n^{c}\nabla_{c}n^{a}-n^{a}\nabla_{a}n^{c}\right)\nabla_{c}\right]-\\&-\frac{\omega(\phi)}{\sqrt{\phi}}\left[N^{2}\ h^{ab}D_{a}\phi D_{b}\phi-\left(\dot{\phi}-N^{a}D_{a}\phi\right)^{2}\right]-V(\phi)\Big\}\ ,\end{aligned} \tag{5.58}$$

onde

$$\begin{aligned}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\beta}\phi\ &=\ g^{00}\dot{\phi}^{2}-2g^{0a}\dot{\phi}\partial_{a}\phi+g^{ab}\partial_{a}\phi\partial_{b}\phi\\&=\ -\frac{1}{N^{2}}\dot{\phi}^{2}+2\frac{N^{a}}{N^{2}}\dot{\phi}\partial_{a}\phi+\left(h^{ab}-\frac{N^{a}N^{b}}{N^{2}}\right)\partial_{a}\phi\partial_{b}\phi\\&=\ \frac{1}{N^{2}}\left[N^{2}h^{ab}D_{a}\phi D_{b}\phi-\left(\dot{\phi}^{2}-2N^{a}\dot{\phi}D_{a}\phi+N^{a}N^{b}D_{a}\phi D_{b}\phi\right)\right]\\&=\ \frac{1}{N^{2}}\left[N^{2}h^{ab}D_{a}\phi D_{b}\phi-\left(\dot{\phi}-N^{a}D_{a}\phi\right)^{2}\right]\ ,\end{aligned} \tag{5.59}$$

e usando

$$
\begin{aligned}
N\left(n^c\nabla_a n^a - n^a\nabla_a n^c\right)\nabla_c\phi &= N\nabla_a\left(n_b g^{ab}\right)\left(\frac{t^c-N^c}{N}\right)\partial_c\phi - Nn^a\nabla_c\phi\nabla_a n^c \\
&= g^{ab}\nabla_a n_b\left(t^c-N^c\right)\partial_c\phi - N\, n^a\nabla^a\phi\nabla_a\left(n_b g^{bc}\right) \\
&= \left(h^{ab}-n^a n^b\right)\nabla_a n_b\left(t^c\phi - N^c D_c\phi\right) - N\left(h^{bc}-n^b n^c\right)n^a\nabla_a n_b\nabla_c\phi \\
&= h^{ab}\nabla_a n_b\left(\dot{\phi}-N^a D_a\phi\right) - n^a n^b\nabla_a n_b\, N\, n^c\nabla_c\phi \\
&\quad -Nn^a h^{bc}\nabla_a n_b\nabla_c\phi + Nn^a n^b n^c\nabla_a n_b\nabla_c\phi \\
&= h^a{}_c\, h^{bc}\,\nabla_a n_b\left(\dot{\phi}-N^a\nabla_a\phi\right) - N\, h^{bc}n^a\,\nabla_a n_b\nabla_c\phi \\
&= h^{bc}K_{bc}\left(\dot{\phi}-N^a D_a\phi\right) - Nh^{bc}n^a\nabla_a n_b\nabla_c\phi \\
&= K\left(\dot{\phi}-N^a D_a\phi\right) - \nabla_c\phi h^{bc}\left[\nabla_a\left(n^a n_b\right) - n_b\nabla_a n^a\right]N \\
&= K\left(\dot{\phi}-N^a D_a\phi\right) - h^{ad}h^c{}_d\nabla_c\phi h^b{}_a\nabla_b N \\
&= -h^{ad}D_a N D_d\phi + K\left(\dot{\phi}-N^a D_a\phi\right)\ ,
\end{aligned} \tag{5.60}
$$

onde usamos as relações $K_{ab} = h_a{}^c\,\nabla_c n_b$, $\dot{\phi} = t^a\partial_a\phi$ e $h^{ab}n_b = 0$. Portanto, a densidade de Lagrangiana é

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\sqrt{h}}{2}\Big\{N\phi\left(R+K_{ab}K^{ab}-K^2\right) + 2h^{ab}D_a N D_b\phi - \\
&\quad -\frac{\omega}{N\phi}\left[N^2h^{ab}D_a\phi D_b\phi - \left(\dot{\phi}-N^a D_a\phi\right)^2\right] - \\
&\quad -2K\left(\dot{\phi}-N^a D_a\phi\right) - NV(\phi)\Big\}\ .
\end{aligned} \tag{5.61}
$$

Os campos originais da teoria são $\left(g^{ab},\phi\right) \equiv \left(N,N^a,h^{ab},\phi\right)$. Os momentos canônicos conjugados à função lapso temporal e ao vetor deslocamento espacial são, respectivamente,

$$
\Pi_N = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}} = 0\ , \tag{5.62}
$$

$$
\Pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}^a} = 0. \tag{5.63}
$$

O momento canonicamente conjugado à métrica induzida é

$$
\begin{aligned}
\Pi_{ab} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}^{ab}} \\
&= \frac{\sqrt{h}}{2}\left[\phi\left(K_{ab}-Kh_{ab}\right) - \frac{h_{ab}}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)\right]\ ,
\end{aligned} \tag{5.64}
$$

onde utilizamos

$$\frac{\partial}{\partial \dot{h}^{ab}} K^{ab} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}^{ab}} \left[\frac{1}{2N} \left(\dot{h}^{ab} - 2D^{(a} N^{b)} \right) \right] = \frac{1}{2N} \tag{5.65}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \dot{h}^{ab}} K = \frac{\partial}{\partial \dot{h}^{ab}} h_{ab} K^{ab} = h_{ab} \frac{\partial K^{ab}}{\partial \dot{h}^{ab}} = \frac{h_{ab}}{2N} \ . \tag{5.66}$$

Finalmente, o momento conjugado ao campo ϕ é dado por

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\sqrt{h}}{2} \left[-2K + \frac{2\omega}{N\phi} \left(\dot{\phi} - N^c D_c \phi \right) \right] \ . \tag{5.67}$$

Tal como em relatividade geral, o momento conjugado para N e N^a são equações de vínculos triviais, ou seja, $\Pi \approx \Pi_a \approx 0$. Por outro lado, a partir da combinação de $\Pi_h \equiv h_{ab}\Pi^{ab}$ e Π_ϕ, encontramos que

$$\begin{aligned} \Pi_h - \phi \Pi_\phi &= \frac{\sqrt{h}}{2} \left[\phi \left(K - 3K \right) - \frac{3}{N} \left(\dot{\phi} - N^c D_c \phi \right) \right] - \\ &\quad - \left[-2K\phi + \frac{2\omega}{N} \left(\dot{\phi} - N^c D_c \phi \right) \right] \\ &= - \left(\frac{3 + 2\omega}{N} \right) \frac{\sqrt{h}}{2} \left(\dot{\phi} - N^c D_c \phi \right) \ , \end{aligned} \tag{5.68}$$

também desaparece quando $\omega = -\frac{3}{2}$, que é o caso associado à $f(R)$ Palatini [49]. Para $\omega \neq -\frac{3}{2}$ obtemos o caso geral. Na exposição que se segue trataremos do caso geral.

Tomando

$$
\begin{aligned}
\Pi^{ab}\Pi_{ab} &= \frac{\sqrt{h}}{2}\left[\phi\left(K^{ab}-Kh^{ab}\right)-\frac{h^{ab}}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)\right]\times \\
&\times\frac{\sqrt{h}}{2}\left[\phi\left(K_{ab}-Kh_{ab}\right)-\frac{h_{ab}}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)\right] \\
&= \frac{h}{4}\Big\{\phi^2\left(K^{ab}-Kh^{ab}\right)\left(K_{ab}-Kh_{ab}\right)- \\
&-\left[\phi\left(K^{ab}-Kh^{ab}\right)\frac{h_{ab}}{N}+\phi\left(K_{ab}-Kh_{ab}\right)\frac{h^{ab}}{N}\right]\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)+ \\
&+\frac{h^{ab}h_{ab}}{N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2\Big\} \\
&= \frac{h}{4}\Big[\phi^2\left(K^{ab}K_{ab}-2K^2+3K^2\right)- \\
&-2\phi\left(K^{ab}-Kh^{ab}\right)\frac{h_{ab}}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)+ \\
&+\frac{3}{N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2\Big] \qquad (5.69)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\Pi^2 &= h_{ab}\Pi^{ab}\,h_{cd}\Pi^{cd} = \\
&= \frac{h}{4}\left[\phi\left(K-3K\right)-\frac{3}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)\right]\left[\phi\left(K-3K\right)+\frac{3}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)\right] \\
&= \frac{h}{4}\left[\phi^2(4K^2)+\frac{12K\phi}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)+\frac{9}{N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2\right]. \qquad (5.70)
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
\Pi^{ab}\Pi_{ab}-\frac{\Pi^2}{2} &= \frac{h}{4}\Big\{\phi^2\left(K^{ab}K_{ab}+K^2\right)-\frac{2\phi}{N}\left(K-3K\right)\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)+ \\
&+\frac{3}{N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2-\Big[\phi^2(2K^2)+\frac{6K\phi}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)+ \\
&+\frac{9}{2N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2\Big]\Big\} \\
&= \frac{h}{4}\Big\{\phi^2\left(K^{ab}K_{ab}+K^2+\frac{4\phi K}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)\right)+\frac{6}{2N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2- \\
&-\left[\phi^2(2K^2)+\frac{6K\phi}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)+\frac{9}{2N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2\right]\Big\} \\
&= \frac{h}{4}\left[\phi^2\left(K^{ab}K_{ab}-K^2\right)-\frac{2\phi K}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)-\frac{3}{2N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2\right] \\
&= \frac{\sqrt{h}\phi}{2}\Big[\frac{\sqrt{h}\phi}{2}\left(K^{ab}K_{ab}-K^2\right)+\frac{\sqrt{h}K}{N}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)- \\
&-\frac{3\sqrt{h}}{2N^2}\left(\dot{\phi}-N^c D_c\phi\right)^2\Big], \qquad (5.71)
\end{aligned}
$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{2N}{\sqrt{h}\phi}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab}-\frac{\Pi^2}{2}\right)+\frac{3}{2N}\frac{\sqrt{h}}{2}\left(\dot{\phi}-N^cD_c\phi\right)^2 &= \frac{\sqrt{h}}{2}\Big[N\phi\left(K^{ab}K_{ab}-K^2\right)- \\
&\quad -2K\left(\dot{\phi}-N^cD_c\phi\right)\Big] \; . \qquad (5.72)
\end{aligned}$$

De modo que a Lagrangiana pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\sqrt{h}}{2}\Big\{N\left[\phi R+\frac{4}{h\phi}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab}-\frac{\Pi^2}{2}\right)\right]+(3+2\omega)\frac{\left(\dot{\phi}-N^cD_c\phi\right)^2}{2N\phi}- \\
&\quad -\frac{N\omega}{\phi}D^a\phi D_a\phi D^b\phi D_bN-NV(\phi)\Big\}+D^c\phi D_cN \; . \qquad (5.73)
\end{aligned}$$

Mas, notamos que

$$\left(\dot{\phi}-N^cD_c\phi\right)^2=\left[-\frac{2}{\sqrt{h}}\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)\left(\Pi_h-\phi\Pi_\phi\right)\right]^2 \; . \qquad (5.74)$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{h}}{2}\left(3+2\omega\right)\frac{\left(\dot{\phi}-N^cD_c\phi\right)^2}{2N\phi} &= \frac{\sqrt{h}}{2}\frac{(3+2\omega)}{2N\phi}\frac{4}{h}\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)^2\left(\Pi_h-\phi\Pi_\phi\right)^2 \\
&= \frac{\sqrt{h}}{2}\frac{1}{(3+2\omega)}\frac{4}{h}\frac{N}{2\phi}\left(\Pi_h-\phi\Pi_\phi\right)^2 \qquad (5.75)
\end{aligned}$$

E a Lagrangiana pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\sqrt{h}}{2}\Big\{N\left[\phi R+\frac{4}{h\phi}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab}-\frac{\Pi_h^2}{2}\right)\right]- \\
&\quad -\frac{N\omega}{\phi}D_c\phi D^c\phi-NV(\phi)+ \\
&\quad +\frac{2N}{h\phi}\frac{1}{(3+2\omega)}\left(\Pi_h-\phi\Pi_\phi\right)^2\Big\}+ \\
&\quad +\frac{2\sqrt{h}}{2}D_c\phi D^cN \; . \qquad (5.76)
\end{aligned}$$

Agora vamos encontrar a Hamiltoniana da teoria

$$H=\int\left(p\dot{q}(q,p)-L\right)d^3x \; . \qquad (5.77)$$

Primeiro, calculamos $\dot{h}_{ab}$. Tomando o traço de seu momento conjugado

$$\begin{aligned} \Pi^a{}_a &= \frac{h}{2}\left[2\phi(K-3K) - \frac{3}{N}\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{h}}{2}\left[\frac{3}{N}\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right)\right] , \end{aligned} \tag{5.78}$$

resultando

$$-K = \frac{\Pi^a{}_a}{\phi\sqrt{h}} + \frac{3}{2}\frac{\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right)}{N\phi} , \tag{5.79}$$

também

$$\frac{2\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} = \phi\left(K^{ab} - Kh^{ab}\right) - \frac{h^{ab}}{N}\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right) , \tag{5.80}$$

obtendo

$$\frac{2\Pi^{ab}}{\phi\sqrt{h}} + \frac{h^{ab}}{\phi N}\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right) = K^{ab} - Kh^{ab} . \tag{5.81}$$

Usando (5.79), temos

$$\begin{aligned} K^{ab} &= \frac{2\Pi^{ab}}{\phi\sqrt{h}} + \frac{h^{ab}}{\phi N}\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right) - \frac{\Pi^c{}_c\, h^{ab}}{\phi\sqrt{h}} - \frac{3h^{ab}}{2N\phi}\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right) \\ &= \frac{2}{\phi\sqrt{h}}\left(\Pi^{ab} - \frac{1}{2}\Pi^c{}_c\, h^{ab}\right) - \frac{h^{ab}}{2\phi N}\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right) . \end{aligned} \tag{5.82}$$

Da relação $\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + 2D_{(a}N_{b)}$,

$$\dot{h}_{ab} = \frac{2N}{\phi}\frac{2}{\sqrt{h}}\left(\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\Pi^c{}_c\, h_{ab}\right) - \frac{h_{ab}}{\phi}\left(\dot{\phi} - N^c D_c\phi\right) + 2D_{(a}N_{b)} , \tag{5.83}$$

e usando $\dot{\phi} - N^c D_c\phi = -\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)\frac{2}{\sqrt{h}}\left(h_{ab}\Pi^{ab} - \phi\Pi_\phi\right)$, temos

$$\dot{h}_{ab} = \frac{2N}{\phi}\frac{2}{\sqrt{h}}\left(\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\Pi^c{}_c\, h_{ab}\right) + \frac{2}{\sqrt{h}}\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)\frac{h_{ab}}{\phi}\left(h_{cd}\Pi^{cd} - \phi\Pi_\phi 2D_{(a}N_{b)}\right) \tag{5.84}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} &= \frac{2N}{\phi}\frac{2}{\sqrt{h}}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{c}{}_{c}\right)^{2}\right) - \\ &- \frac{2}{\sqrt{h}}\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)\left(h_{cd}\Pi^{cd} - \phi\Pi_{\phi}\right)\frac{\Pi_h}{\phi} + 2\Pi^{ab}D_{(a}N_{b)} \ . \end{aligned} \tag{5.85}$$

Também

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{\sqrt{h}}\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)\left(h_{ab}\Pi^{ab} - \phi\Pi_{\phi}\right) + N^{a}D_{a}\phi \tag{5.86}$$

e

$$\dot{\phi}\Pi_{\phi} = \frac{2}{\sqrt{h}}\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)\left(h_{ab}\Pi^{ab} - \phi\Pi_{\phi}\right)\Pi_{\phi} + \Pi_{\phi}N^{a}D_{a}\phi \ , \tag{5.87}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \dot{\phi}\Pi_{\phi} &= \frac{2N}{\phi}\frac{2}{\sqrt{h}}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{c}{}_{c}\right)^{2}\right) + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} + \\ &+ N^{a}D_{a}\phi\Pi_{\phi} - \frac{2}{\sqrt{h}}\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)\left(h_{cd}\Pi^{cd} - \phi\Pi_{\phi}\right)\left(\frac{\Pi_h}{\phi} - \Pi_{\phi}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{h}}\frac{2N}{\phi}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{c}{}_{c}\right)^{2}\right) + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} + \\ &+ N^{c}D_{c}\phi\Pi_{\phi} + \frac{2}{\phi\sqrt{h}}\left(\frac{N}{3+2\omega}\right)\left(h_{cd}\Pi^{cd} - \phi\Pi_{\phi}\right)^{2} \ . \end{aligned} \tag{5.88}$$

Logo, a densidade Hamiltoniana é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \dot{\phi}\Pi_{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \left(\frac{\sqrt{h}}{2}\right)N\Big[-\phi R + \frac{4}{h\phi}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{\Pi_h^2}{2}\right) + \frac{\omega}{\phi}D_{c}\phi D^{c}\phi + \\ &+ V(\phi) + \frac{2}{h\phi(3+2\omega)}\left(\Pi_h - \phi\Pi_{\phi}\right)^{2}\Big] - \frac{\sqrt{h}}{2}\times 2D_{c}\phi D^{c}N + \\ &+ N^{c}\Pi_{\phi}D_{c}\phi + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} \ . \end{aligned} \tag{5.89}$$

Agora podemos proceder com o algoritmo simplético. Tomando $V^{(0)} = \mathcal{H}$, a Lagrangiana simplética de ordem zero fica

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{h}^{ab}\Pi_{ab} + \dot{\phi}\Pi_{\phi} - V^{(0)} \ . \tag{5.90}$$

O vetor simplético e a 1-forma de ordem zero são, respectivamente,

$$(\xi^{\alpha(ij)(0)}) = \begin{pmatrix} h^{ij} & \Pi_{ij} & \phi & \Pi_\phi & N & N^i \end{pmatrix} \tag{5.91}$$

e

$$(a_{\alpha(kl)}{}^{(0)})^T = \begin{pmatrix} \Pi_{kl} & 0^{kl} & \Pi_\phi & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix} \ . \tag{5.92}$$

Nesse caso optamos por deixar de fora do vetor simplético de ordem zero os momentos conjugados à função lapso e ao vetor deslocamento, porque, como vimos para o caso de Relatividade Geral, esses campos levam a simetrias de calibre triviais que não afetam o desenvolvimento dos cálculos. Vamos chamar os modos-zero associados a esses campos de $\nu_{[3]}$ e $\nu_{[4]p}$.

A matriz pré-simplética tem seus elementos dados por

$$f_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{\delta a_\alpha(x)}{\delta\xi^\beta(y)} - \frac{\delta a_\beta(y)}{\delta\xi^\alpha(x)} \ , \tag{5.93}$$

Em particular,

$$\frac{\delta a_\beta(y)}{\delta\xi^\alpha(x)} = \begin{pmatrix} 0_{ijkl} & 0^{kl}_{ij} & 0_{ij} & 0_{ij} & 0_{ij} & 0_{ijk} \\ \delta^{ij}_{kl}(x,y) & 0^{ijkl} & 0^{ij} & 0^{ij} & 0^{ij} & 0^{ij}_k \\ 0_{kl} & 0^{kl} & 0 & 0 & 0 & 0_k \\ 0_{kl} & 0^{kl} & 1 & 0 & 0 & 0_k \\ 0_{kl} & 0^{kl} & 0 & 0 & 0 & 0_k \\ 0_{ikl} & 0^{kl}_i & 0_i & 0_i & 0_i & 0_{ik} \end{pmatrix} \ . \tag{5.94}$$

Logo, a matriz pré-simplética de ordem zero é

$$(f^{(0)}_{\alpha(ij)\beta(kl)}(x,y)) = \begin{pmatrix} 0_{ijkl} & \delta^{kl}_{ij}(x,y) & 0_{ij} & 0_{ij} & 0_{ij} & 0_{ijk} \\ -\delta^{ij}_{kl}(x,y) & 0^{ijkl} & 0^{ij} & 0^{ij} & 0^{ij} & 0^{ij}_k \\ 0_{kl} & 0^{kl} & 0 & 1 & 0 & 0_k \\ 0_{kl} & 0^{kl} & -1 & 0 & 0 & 0_k \\ 0_{kl} & 0^{kl} & 0 & 0 & 0 & 0_k \\ 0_{ikl} & 0^{kl}_i & 0_i & 0_i & 0_i & 0_{ik} \end{pmatrix} \ . \tag{5.95}$$

Os modos zeros desta matriz são

$$\nu_{[1]}^{\alpha(ij)} = \begin{pmatrix} 0^{ij} & 0_{ij} & 0 & 0 & 1 & 0^i \end{pmatrix} \tag{5.96}$$

e

$$\nu_{[2]p}^{\alpha(ij)} = \begin{pmatrix} 0^{ij} & 0_{ij} & 0 & 0 & 0 & \delta_p^i \end{pmatrix} . \tag{5.97}$$

A condição de consistência (3.26) aplicada aos vínculos conduz ao vínculo hamiltoniano para Brans-Dicke [50], [52]

$$\begin{aligned} \Omega \equiv & \frac{\sqrt{h}}{2}\Big[-\phi R + \frac{4}{h\phi}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{\Pi_h^2}{2}\right) + \frac{\omega}{\phi} D_c\phi D^c\phi + V(\phi) + \\ & + \frac{2}{h\phi(3+2\omega)}\left(\Pi_h - \phi\Pi_\phi\right)^2 + 2D_a D^a \phi \Big] \approx 0 \end{aligned} \tag{5.98}$$

e ao vínculo de difeomorfismo para Brans-Dicke [50], [52]

$$\Omega_a \equiv -2h_{ab}D_c\Pi^{cb} + \Pi_\phi D_a\phi \approx 0 . \tag{5.99}$$

Procedendo à primeira iteração, fazendo $V^{(1)} = V^{(0)}|_\Omega = 0$, como em relatividade geral, e

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{h}^{ab}\Pi_{ab} + \dot{\phi}\Pi_\phi + \dot{\lambda}\Omega + \dot{\lambda}^a\Omega_a . \tag{5.100}$$

Então

$$\left(\xi^{\alpha(kl)(1)}\right) = \begin{pmatrix} h^{ij} & \Pi_{ij} & \phi & \Pi_\phi & \lambda & \lambda^i \end{pmatrix} , \tag{5.101}$$

$$\left(a_{\alpha(kl)}{}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} \Pi_{kl} & 0^{kl} & \Pi_\phi & 0 & \Omega & \Omega_k \end{pmatrix} . \tag{5.102}$$

Quando a matriz simplética de primeira ordem é

$$(f^{(1)}_{\alpha(ij)\beta(kl)})(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{kl}_{ij}(x,y) & 0 & 0 & -\frac{\delta\Omega(y)}{\delta h^{ij}(x)} & -\frac{\delta\Omega_k(y)}{\delta h^{ij}(x)} \\ -\delta^{ij}_{kl}(x,y) & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta\Omega(y)}{\delta\Pi_{ij}(x)} & -\frac{\delta\Omega_k(y)}{\delta\Pi_{ij}(x)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\delta\Omega(y)}{\delta\phi(x)} & -\frac{\delta\Omega_k(y)}{\delta\phi(x)} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{\delta\Omega(y)}{\delta\Pi_\phi(x)} & -\frac{\delta\Omega_k(y)}{\delta\Pi_\Phi(x)} \\ \frac{\delta\Omega(x)}{\delta h^{kl}(y)} & \frac{\delta\Omega(x)}{\delta\Pi_{kl}(y)} & \frac{\delta\Omega(x)}{\delta\phi(y)} & \frac{\delta\Omega(x)}{\delta\Pi_\phi(y)} & 0 & 0 \\ \frac{\delta\Omega_i(x)}{\delta h^{kl}(y)} & \frac{\delta\Omega_i(x)}{\delta\Pi_{kl}(y)} & \frac{\delta\Omega_i(x)}{\delta\phi(y)} & \frac{\delta\Omega_i(x)}{\delta\Pi_\phi(y)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.103}$$

Analogamente a (5.36) e a (5.37), os modos-zero de (5.103) são

$$\nu^{\alpha(ij)}_{[5]}(x) = \begin{pmatrix} \int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Pi^{ij}(x)} & -\int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta h^{ij}(x)} & \int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Pi_\Phi(x)} & -\int d^3z \frac{\delta\Omega(z)}{\delta\Phi(x)} & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.104}$$

e

$$\nu^{\alpha(ij)}_{[6]p}(x) = \begin{pmatrix} \int d^3z \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta\Pi_{ij}(x)} & -\int d^3z \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta h_{ij}(x)} & \int d^3z \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta\Pi_\Phi(x)} & -\int d^3z \frac{\delta\Omega_p(z)}{\delta\Phi(x)} & 0 & -\delta^i_p \end{pmatrix}. \tag{5.105}$$

Contraindo os vetores (5.104) com a matriz (5.103), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int d^3x\, \nu^{\alpha(ij)}_{[5]}(x) f_{\alpha(ij)\beta(kl)}(x,y)\right) &= \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \{\int d^3z\,\Omega(z),\Omega(y)\} & \{\int d^3z\,\Omega(z),\Omega_k(y)\} \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.106}$$

Da mesma forma com os vetores (5.105)

$$\begin{aligned} \left(\int d^3x\, \nu^{\alpha(ij)}_{[6]p}(x) f_{\alpha(ij)\beta(kl)}(x,y)\right) &= \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \{\int d^3z\,\Omega(z),\Omega_p(y)\} & \{\int d^3z\,\Omega_k(z),\Omega_p(y)\} \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.107}$$

Assim, como ocorre com Relatividade Geral, como era de se esperar, a gravitação de Brans-Dicke no formalismo canônico também comporta modos-zero somente na superfície de vínculos. A explicação é a mesma: isso ocorre devido à foliação ser uma operação que fixa uma direção temporal e mudanças arbitrárias de coordenada acabam por contorcer a foliação, gerando transformações não invariantes de calibre.

Procedendo a contagem dos campos independentes da teoria temos $(22$ (campos iniciais)$-8\ (\nu_1,\ \nu_{2p},\ \nu_3,\ \nu_{4p}) - 4\ (\nu_5,\ \nu_{6p})\ - 4$ (1 vínculo hamiltoniano mais 3 vínculos de difeomorfismo) $)/2 = 3$ graus de liberdade.

Capítulo 6

Considerações Finais

O formalismo canônico representou uma revolução nos métodos de se fazer física no século XIX [53]. A possibilidade de abordar uma ampla gama de problemas sob uma ótica formalmente estruturada e unificada trouxe sucessivos avanços no modo de pensar científico. No último século, a ciência tem sido desafiada a pensar geometricamente e a geometria simplética na mecânica hamiltoniana vem ganhando espaço como linguagem formal no tratamento matemático de teorias físicas [28].

Neste trabalho tratamos de descrever as teorias da gravitação de Einstein e Brans-Dicke utilizando o formalismo geométrico simplético através da aplicação do método desenvolvido por Barcelos-Neto e Wotzaseck [8, 10]. No capítulo 2 fizemos uma revisão do método matemático utilizado na descrição de teorias hamiltonianas que apresentam vínculos, destacando o algoritmo de Dirac para o tratamento de vínculos.

No capítulo 3 descrevemos como um sistema hamiltoniano vinculados pode ser tratado como um problema geométrico e como o formalismo simplético de Faddeev-Jackiw dá abertura para um tratamento puramente geométrico da evolução das variáveis duma teoria em seu espaço de fase.

No capítulo 4 apresentamos como a gravitação, uma teoria do espaço-tempo, pode ser matematicamente transformada em uma teoria hamiltoniana com evolução num tipo especial de espaço de fase. Tentamos fazer uma descrição detalhada do formalismo ADM da geometria do espaço-tempo no que concerne ao desenvolvimento dos cálculos empregados na teoria.

Partindo da teoria da Relatividade Geral no vácuo em sua formulação lagrangiana, no capítulo 5 apresentamos pela primeira vez como usar o formalismo simplético, em sua formulação de BW, para tratar de Relatividade Geral e Brans-Dicke. Avanços nessa direção foram atingidos em alguns trabalhos recentes [23, 24], mas o emprego do formalismo de BW não foi completo, somente parte da matriz pré-simplética foi analisada nesses artigos, o que impossibilita, em geral, a contagem dos graus de liberdade e a descoberta das transformações de calibre. Introduzimos aqui também uma notação adequada para tratar de relatividade geral no contexto do formalismo simplético, em particular a coordenada simplética é descrita por um índice principal α e outros dois sub-índices, como visto na Eq. (5.15).

Apesar da equivalência entre as abordagens de Dirac e de Faddeev-Jackiw [54], encontramos que a descrição simplética fornece de maneira explícita uma importante característica da gravitação ADM: uma limitação na própria invariância por transformações arbitrárias de coordenadas. Uma vez que os campos que definem uma foliação (N e N^i) não podem sofrer deformações arbitrárias sem alterar a própria foliação, a geometria do espaço-tempo passa a apresentar, nessa descrição, invariância por difeomorfismos espaciais mais invariância por deslocamentos "temporais" dados por seu vínculo hamiltoniano.

A gravitação de Brans-Dicke exibe, no contexto da geometria simplética, as mesmas características fundamentais que a gravitação de Einstein no que diz respeito à natureza do espaço-tempo foliado, o que indica a consistência matemática da abordagem alternativamente explorada neste trabalho.

Apêndice A

Transformação de Coordenadas em Relatividade Geral Canônica no Método de Dirac

Seção extraída de [44], explica como Relatividade Geral se comporta sob transformações de coordenadas no contexto do formalismo canônico. O objetivo é mostrar que RG canônica só é uma teoria fisicamente consistente na superfície de vínculos.

Partindo do princípio que o espaço-tempo (entendido aqui como uma superfície geométrica mais um sistema de coordenadas) evolui dinamicamente em resposta a variação de outros campos nele definidos, temos que a descrição física de um evento qualquer nesse espaço-tempo requer que a introdução de quatro variáveis redundantes (descritoras da geometria com características dinâmicas) resulte na inclusão de quatro vínculos no formalismo hamiltoniano, uma vez que os momentos não podem ser dados como funcionais das coordenadas e velocidades. Sejam as variáveis que descrevem a superfície denotadas por $y^A(x)$ $(A = 0{,}1{,}2{,}3)$ e seus momentos conjugados $\Pi_A(x)$, então esses vínculos têm a forma

$$\mathcal{H}_A \equiv \Pi_A + K_A = 0\ , \tag{A.1}$$

onde K_A é independente dos Π_A, mas em geral depende dos y^A e das variáveis canônicas do campo.

A mudança em qualquer funcional F das variáveis canônicas é dada pelo parêntese de

Poisson de F com o hamiltoniano

$$\delta H = \int d^3x \delta y^A(x) \mathcal{H}_A(x) \ . \tag{A.2}$$

Se os quatro vínculos (A.1) são projetados em uma componente $\mathcal{H}_\perp$ ortogonal à superfície e três componentes $\mathcal{H}_r$ tangenciais temos, por definição,

$$\mathcal{H}_\perp \equiv \mathcal{H}_A \, n^A \quad ; \quad \mathcal{H}_r \equiv \mathcal{H}_A \, y^A_{,r} \tag{A.3}$$

onde n^A é o vetor unitário normal à superfície. De modo que obtemos o sistema de vínculos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &\equiv \Pi_\perp + K_\perp = 0 \ , \\ \mathcal{H}_r &\equiv \Pi_r + K_r = 0 \ . \end{aligned} \tag{A.4}$$

O hamiltoniano (A.2) toma, então, a forma

$$\delta H = \int d^3x \delta y^\alpha \, \alpha \equiv \int d^3x \left(\delta y^\perp \, \mathcal{H}_\perp + \delta y^s \, \mathcal{H}_s \right) \ . \tag{A.5}$$

Na análise que se segue supomos que as equações de Hamilton são integráveis, isto é, a mudança nas variáveis canônicas durante a evolução duma dada superfície inicial para uma dada superfície final é independente de uma sequência particular de superfícies intermediárias usadas na avaliação dessa mudança.

No formalismo hamiltoniano de Dirac a mudança em qualquer funcional F sob uma deformação δy^α da superfície é dada por

$$\delta F = \int d^3x \, \{F, \delta y^\alpha \, \mathcal{H}_\alpha\} \ . \tag{A.6}$$

Ao mesmo tempo que os vínculos

$$\mathcal{H}_\alpha = 0 \tag{A.7}$$

se mantêm.

Considere uma superfície σ que é deformada por uma transformação de coordenadas infinitesimal, digamos $\delta\xi^\alpha$, em uma superfície σ_1. Seja outra transformação $\delta\eta^\alpha$ em σ_1 levando a uma superfície σ'. Realizando as operações acima na ordem inversa obtemos como resultado a superfície σ'', em geral diferente de σ' — deformações normais e tangenciais são não "holonômicas". Nesse caso existe uma transformação $\delta\zeta$ que deforma σ' em σ''. Essa deformação compensatória é dada por

$$\delta\zeta^{\nu}(x'') = \int d^3x \int d^3x' \kappa^{\nu}_{\alpha\beta}(x'',\, x{,}x')\delta\xi^{\alpha}(x)\delta\eta^{\beta}(x') \ , \tag{A.8}$$

onde foram desprezados os termos lineares.

Repetindo (A.6) suficientemente encontramos

$$\begin{aligned} F[\sigma'] &= F + \int d^3x \left\{F,\ \left(\delta\xi^{\alpha}(x) + \delta\eta^{\alpha}(x)\right)\mathcal{H}_{\alpha}(x)\right\} \\ &\quad + \int d^3x \int d^3x \left\{\left\{F,\ \delta\eta^{\beta}(x')\ \mathcal{H}_{\beta}(x')\right\},\, \delta\xi^{\alpha}(x)\mathcal{H}_{\alpha}(x)\right\} \ , \end{aligned} \tag{A.9}$$

F e $\mathcal{H}_{\alpha}$ são avaliados na superfície original σ.

Mudando a ordem das deformações e subtraindo o resultado de (A.9) obtemos

$$F[\sigma''] - F[\sigma'] = \int d^3x \int d^3x' \left\{F,\ \left\{\delta\xi^{\alpha}(x)\ \mathcal{H}_{\alpha}(x),\, \delta\eta^{\beta}(x')\ \mathcal{H}_{\beta}(x')\right\}\right\} \ . \tag{A.10}$$

Por outro lado, da própria definição de $\delta\zeta$, temos que

$$F[\sigma''] - F[\sigma'] = \int d^3x'' \left\{F,\, \delta\zeta^{\nu}(x'')\ \mathcal{H}_{\nu}(x'')\right\} \ . \tag{A.11}$$

A teoria só poderá descrever uma evolução dinâmica consistente se (A.10) e (A.11) forem iguais, logo, de (A.8), temos que

$$\left\{F,\ \left\{\mathcal{H}_{\alpha}(x),\, \mathcal{H}_{\beta}(x')\right\}\right\} - \int d^3x'' \kappa^{\nu}_{\alpha\beta}(x'';\ x{,}x')\ \mathcal{H}_{\nu}(x'') = 0 \ . \tag{A.12}$$

Dessa forma pode-se provar que [44]

$$\left\{\mathcal{H}_{\alpha}(x),\, \mathcal{H}_{\beta}(x')\right\} = \int d^3x''\ \kappa^{\nu}_{\alpha\beta}(x'';\ x{,}x')\ \mathcal{H}_{\nu}(x'') \ . \tag{A.13}$$

O que significa que a teoria só pode fornecer equações dinâmicas consistentes se as condições iniciais forem dadas sob os vínculos (A.7), cuja a superfície por eles formada jamais será abandonada.

Uma análise das deformações em um sistema de coordenadas fixado fornece o algebróide [37] dos vínculos

$$\begin{aligned}\left\{\mathcal{H}_\perp(x),\, \mathcal{H}_\perp(x')\right\} &= \left(\mathcal{H}^r(x) + \mathcal{H}^r(x')\right)\delta_{,r}(x,x')\ , &\text{(A.14a)}\\ \left\{\mathcal{H}_r(x),\, \mathcal{H}_\perp(x')\right\} &= \mathcal{H}_\perp(x)\delta_{,r}(x,x')\ , &\text{(A.14b)}\\ \left\{\mathcal{H}_r(x),\, \mathcal{H}_s(x')\right\} &= \mathcal{H}_r(x)\ \delta_{,s}(x,x') + \mathcal{H}_s(x')\ \delta_{,r}(x,x')\ . &\text{(A.14c)}\end{aligned}$$

Donde se obtém que [44]

$$\begin{aligned}\kappa^{\perp}_{r\perp}(x'';\ x,x') &= -\kappa^{\perp}_{\perp r}(x'';\ x',x) = \delta(x'',x)\delta_{,r}(x'',x')\ , &\text{(A.15a)}\\ \kappa^{r}_{ab}(x'';\ x,x') &= -\kappa^{r}_{ba}(x'';\ x',x)\\ &= \delta(x'',x)\delta_{,a}(x'',x')\delta^r_b - \delta(x'',x)\delta_{,b}(x'',x')\delta^r_a\ , &\text{(A.15b)}\\ \kappa^{r}_{\perp\perp}(x'';\ x,x') &= -\kappa^{r}_{\perp\perp}(x'';\ x',x)\\ &= g^{rs}(x'')\left(\delta(x'',x)\delta_{,s}(x'',x') - \delta(x'',x)\delta_{,s}(x'',x')\right)\ , &\text{(A.15c)}\end{aligned}$$

todos os outros componentes sendo zero.

Agora demonstramos porque a relação (A.13) implica que evoluções dinâmicas só podem ser independentes de caminho na superfície de vínculo.

Considere o argumento utilizado na obtenção de (A.11). Assumindo, como um caso particular, que $\delta\xi^\alpha$e $\delta\eta^\beta$ sejam $c - numbers$[1], então podemos simplesmente retirá-los dos parênteses de Poisson, mesmo quando $\mathcal{H}_\nu \neq 0$. Utilizando (A.11) podemos reescrever (A.10) como

$$F[\sigma''] - F[\sigma'] = \int d^3x \int d^3x' \int d^3x'' \left\{F, \kappa^{\gamma}_{\alpha\beta}(x'';\ x,x')\ \mathcal{H}_\gamma(x'')\right\}\delta\xi^\alpha(x)\ \delta\eta^\beta(x')\ . \qquad \text{(A.16)}$$

Tomando $\delta\xi$ e $\delta\eta$ como sendo puramente ortogonais temos que (A.16) fica

$$F[\sigma''] - F[\sigma'] = \int d^3x \int d^3x' \int d^3x'' \left\{F, \kappa^{\gamma}_{\perp\perp}(x'';\ x,x')\ \mathcal{H}_r(x'')\right\}\delta\xi^\perp(x)\ \delta\eta^\perp(x')\ . \qquad \text{(A.17)}$$

Primeiro notemos que a mudança de um funcional F arbitrário sob uma deformação tangencial $\delta\xi^r$ dada por

$$\delta F = \int d^3x\,\{F,\, \mathcal{H}_r(x)\}\,\delta\xi^r(x) \qquad \text{(A.18)}$$

[1]De $classicalnumber$, nomenclatura utilizada por Dirac para se referir a números reais e complexos. Usada para distinguir números comuns de operadores.

é válida mesmo para $\mathcal{H}_r(x)$ não vinculado a ser nulo. Isso decorre so fato que mudanças de coordenadas numa superfície dependem somente do valor numérico da deformação e é, portanto, independente de qualquer dependência funcional que $\delta\xi^r$ possa ter.

O análogo de (A.11) é, de acordo com (A.18),

$$
\begin{aligned}
F[\sigma''] - F[\sigma'] &= \int d^3x'' \left\{F,\, \kappa_r(x'')\right\} \delta\xi^r(x'') \\
&\equiv \int d^3x \int d^3x' \int d^3x'' \left\{F,\ \mathcal{H}_r(x'')\right\} \kappa^{\gamma}_{\perp\perp}(x'';\ x')\delta\xi^{\perp}(x)\ \delta\eta^{\perp}(x')\ .
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

A evolução somente será independente de caminho se as equações (A.18) e (A.19) concordam entre si, ou seja, quando

$$
\left\{F, \kappa^{\gamma}_{\perp\perp}(x'';\ x,x')\ \mathcal{H}_r(x'')\right\} = \left\{F,\ \mathcal{H}_r(x'')\right\} \kappa^{\gamma}_{\perp\perp}(x'';\ x')\ , \tag{A.20}
$$

que é equivalente a

$$
\left\{F,\ \kappa^{\gamma}_{\perp\perp}(x'';\ x')\right\} \mathcal{H}_r(x'') = 0\ . \tag{A.21}
$$

Mas a equação (A.21) só é uma identidade se $\kappa^{r}_{\perp\perp}$ for um $c - number$, entretanto isso não é verdadeiro. $\kappa^{r}_{\perp\perp}$ não é um $c - number$ pois depende da métrica γ_{rs} (equação (A.15a)). E (A.21) só é uma identidade para o caso

$$
\mathcal{H}_r = 0\ , \tag{A.22}
$$

o que deve ocorrer em qualquer superfície, inclusive, em particular, sob deformações puramente normais. E segundo (A.5) e (A.15b)

$$
\mathcal{H}_{\perp} = 0\ . \tag{A.23}
$$

Concluímos que a exigência de independência de caminho implica que a dinâmica deve ocorrer somente na superfície de vínculos. Em particular, a invariância por transformações de calibre só estão bem definidas na superfície de vínculos.

Referências Bibliográficas

[1] E. P. Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. richard courant lecture in mathematical sciences delivered at new york university, may 11, 1959. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1):1–14, 1960.

[2] J.L. Lagrange. *Mécanique analytique*. Number v. 1 in Mécanique analytique. Ve Courcier, 1811.

[3] F.W. Byron and R.W. Fuller. *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012.

[4] P. A. M. Dirac. Generalized Hamiltonian dynamics. *Can. J. Math.*, 2:129–148, 1950.

[5] J. L. Anderson and P. G. Bergmann. Constraints in covariant field theories. *Phys. Rev.*, 83:1018–1025, 1951.

[6] L. D. Faddeev and R. Jackiw. Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 60:1692–1694, 1988.

[7] R. Jackiw. (Constrained) quantization without tears. In *2nd Workshop on Constraint Theory and Quantization Methods Montepulciano, Italy, June 28-July 1, 1993*, 1993.

[8] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek. Faddeev-Jackiw quantization and constraints. *Int. J. Mod. Phys.*, A7:4981–5004, 1992.

[9] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek. Symplectic quantization of constrained systems. *Mod. Phys. Lett.*, A7:1737–1748, 1992.

[10] C. Wotzasek. Faddeev-Jackiw approach to hidden symmetries. *Annals Phys.*, 243:76–89, 1995.

[11] H. Montani and C. Wotzasek. Faddeev-Jackiw quantization of nonabelian systems. *Mod. Phys. Lett.*, A8:3387–3396, 1993.

[12] D. C. Rodrigues. *Electromagnetic dualities on noncommutative space-time and symplectic formalisms.* PhD thesis, Rio de Janeiro Federal U., 2006.

[13] E. M. C. Abreu, A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, R. C. N. Silva, and C. Wotzasek. Obtaining non-Abelian field theories via Faddeev-Jackiw symplectic formalism. *Phys. Lett.*, A374:3603–3607, 2010.

[14] Y. Huang and J. Yang. Modified Faddeev-Jackiw quantization of massive non-Abelian Yang-Mills fields and Lagrange multiplier fields. *Phys. Lett.*, B668:438–441, 2008.

[15] D. S. Kulshreshtha and H. J. W. Muller-Kirsten. Faddeev-Jackiw quantization of selfdual fields. *Phys. Rev.*, D45:393–397, 1992.

[16] H. Blas and B. M. Pimentel. The Faddeev-Jackiw approach and the affine sl(2) Toda model coupled to matter field. *Annals Phys.*, 282:67–86, 2000.

[17] Z. Long and J. Jing. Faddeev-Jackiw approach to the noncommutativity. *Phys. Lett.*, B560:128–132, 2003.

[18] C. Neves, W. Oliveira, D. C. Rodrigues, and C. Wotzasek. Embedding commutative and noncommutative theories in the symplectic framework. *Phys. Rev.*, D69:045016, 2004.

[19] A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, and D. C. Rodrigues. Symplectic embedding of second class systems. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 127:170–173, 2004.

[20] E. M. C. Abreu, A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, and F. I. Takakura. Duality through the symplectic embedding formalism. *Int. J. Mod. Phys.*, A22:3605–3620, 2007.

[21] C. Neves, W. Oliveira, D. C. Rodrigues, and C. Wotzasek. Hamiltonian symplectic embedding of the massive noncommutative U(1) theory. *J. Phys.*, A37:9303–9316, 2004.

[22] S. Hong, Y. Kim, Y. Park, and K. D. Rothe. Symplectic embedding and Hamilton-Jacobi analysis of Proca model. *Mod. Phys. Lett.*, A17:435–452, 2002.

[23] A. Escalante and J. Manuel-Cabrera. Faddeev–Jackiw quantization of an Abelian and non-Abelian exotic action for gravity in three dimensions. *Annals Phys.*, 361:585–604, 2015.

[24] A. Escalante and O. Rodríguez-Tzompantzi. Dirac's and generalized Faddeev–Jackiw brackets for Einstein's theory in the G -> 0 limit. *Annals Phys.*, 364:136–147, 2016.

[25] N. A. Lemos. *Mecânica Analítica.* Livraria da Física, 2007.

[26] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of gauge systems.* Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 520 p, 1992.

[27] P. A. M. Dirac. *Lectures on quantum mechanics*, volume 2 of *Belfer Graduate School of Science Monographs Series.* Belfer Graduate School of Science, New York, 1964.

[28] M. Gotay and J. Isenberg. The symplectization of science. *Gazette des Mathématiciens*, 2 1992. http://www.pims.math.ca/ gotay/Symplectization

[29] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer, 1989.

[30] G.F.T. Castillo. *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach.* Birkhäuser Boston, 2011.

[31] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Second Edition.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2016.

[32] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics.* Wiley, 1998.

[33] S. Deser. The legacy of ADM. *Phys. Scripta*, 90(6):068006, 2015.

[34] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 40:1997–2027, 2008.

[35] E. Gourgoulhon. 3+1 formalism and bases of numerical relativity. *gr-qc/0703035*, 2007.

[36] R. M. Wald. *General Relativity.* Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p, 1984.

[37] M. Bojowald. *Canonical Gravity and Applications Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity.* Cambridge University Press, 2010.

[38] S. Dengiz. 3+1 Orthogonal and Conformal Decomposition of the Einstein Equation and the ADM Formalism for General Relativity. *1103.1220*, 2011.

[39] C.A. Callioli, R.C.F. Costa, and H.H. Domingues. *Álgebra linear e aplicações.* Atual, 1990.

[40] F. T. Falciano, N. Pinto-Neto, and S. Dias Pinto Vitenti. Scalar Field Perturbations with Arbitrary Potentials in Quantum Backgrounds. *Phys. Rev.*, D87(10):103514, 2013.

[41] P. Mukherjee and A. Saha. Gauge invariances vis-a-vis diffeomorphisms in second order metric gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, A24:4305–4315, 2009.

[42] R. Banerjee, H. J. Rothe, and K. D. Rothe. Master equation for Lagrangian gauge symmetries. *Phys. Lett.*, B479:429–434, 2000.

[43] R. Banerjee, H. J. Rothe, and K. D. Rothe. Hamiltonian approach to Lagrangian gauge symmetries. *Phys. Lett.*, B463:248–251, 1999.

[44] C. Teitelboim. How commutators of constraints reflect the space-time structure. *Annals Phys.*, 79:542–557, 1973.

[45] S. A. Hojman, K. Kuchar, and C. Teitelboim. Geometrodynamics Regained. *Annals Phys.*, 96:88–135, 1976.

[46] K. Kuchař. *Relativity, Astrophysics and Cosmology: Proceedings of the Summer School Held, 14–26 August, 1972 at the Banff Centre, Banff, Alberta*, chapter Canonical Quantization of Gravity, pages 237–288. Springer Netherlands, Dordrecht, 1973.

[47] V. Faraoni and S. Capozziello. *Beyond Einstein Gravity*, volume 170. 170 of *Fundamental Theories of Physics.* Springer, Dordrecht, 2011.

[48] G. J. Olmo. Palatini Approach to Modified Gravity: f(R) Theories and Beyond. *Int. J. Mod. Phys.*, D20:413–462, 2011.

[49] M. Salgado. The Cauchy problem of scalar tensor theories of gravity. *Class. Quant. Grav.*, 23:4719–4742, 2006.

[50] X. Zhang and Y. Ma. Loop Quantum Brans-Dicke Theory. *J. Phys. Conf. Ser.*, 360:012055, 2012.

[51] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961.

[52] G. J. Olmo and H. Sanchis-Alepuz. Hamiltonian Formulation of Palatini f(R) theories a la Brans-Dicke. *Phys. Rev.*, D83:104036, 2011.

[53] C. Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 1986.

[54] J. A. Garcia and J. M. Pons. Equivalence of Faddeev-Jackiw and Dirac approaches for gauge theories. *Int. J. Mod. Phys.*, A12:451–464, 1997.